

The Continuous β Function with Four-Flavor Domain-Wall Fermions

韩雪莹

上海交通大学；中国科学院高能物理研究所； Universität Siegen

合作者：Oliver Witzel (U. Siegen) , Anna Hasenfratz (U. Colorado Boulder)

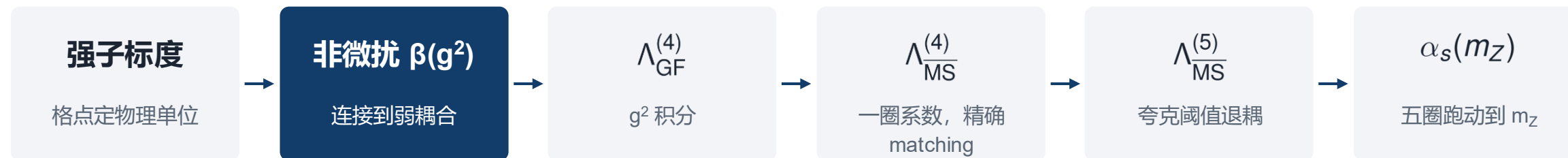
2026 年 10 月 11 日 @ 2026 中国格点 QCD 年会, 深圳

研究背景：非微扰 β 函数与 $\alpha_s(m_Z)$

- $\alpha_s(m_Z)$: 标准模型的基本参数，其不确定度直接进入高能截面的理论误差；格点给出目前最精确的测定
- Λ : QCD 的内禀标度，给定 Λ ，就给出了任意能标上的耦合
- **耦合需要非微扰跑动**：强子标度与微扰区相差几个数量级，由RG β 函数联系

$$\mu^2 \frac{dg^2}{d\mu^2} = \beta(g^2) \quad \Rightarrow \quad \ln \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{1}{2} \int_{g^2(\mu_1)}^{g^2(\mu_2)} \frac{dx}{\beta(x)}$$

$$\frac{\Lambda^2}{\mu^2} = (b_0 g^2)^{-b_1/b_0^2} e^{-1/(b_0 g^2)} \exp \left[- \int_0^{g^2} dx \left(\frac{1}{\beta(x)} + \frac{1}{b_0 x^2} - \frac{b_1}{b_0^2 x} \right) \right], \quad g^2 \equiv g^2(\mu)$$



研究背景

有限体积 step scaling

ALPHA, $N_f = 3$

$$\alpha_s^{(5)}(m_Z) = 0.11876(58)$$

三味 Λ 参数: 344.4(8.7) MeV

α_s 的精度约 0.49%

M. Dalla Brida et al., Nature 652 (2026) 328

Continuous β function

Pure Yang-Mills SU(3)

$$\sqrt{8t_0} \Lambda_{\overline{\text{MS}}} = 0.622(10)$$

耦合范围 $1.2 \leq g^2 \leq 27$

延伸到 t_0 , 给出纯规范的 Λ 参数

A. Hasenfratz et al., Phys. Rev. D 108 (2023) 014502

Continuous β function

HISQ $\cdot N_f = 4$ (4 taste)

α_s 的目标精度

$$\delta\alpha_s/\alpha_s \lesssim 0.3\%$$

弱耦合区域、 $am = 0$ 已有初步结果

C. T. Peterson, Lattice 2026

本工作: $N_f = 4$, massless Möbius domain wall fermion (MDWF)

手征对称性更好 ($am_{res} \sim 10^{-7}$) : 独立检验 α_s 与 Λ 的精确测量

Gradient flow 耦合与 β 函数

Flow 方程: 沿 flow 时间 t 平滑规范场, 平滑半径为 $\sqrt{(8t)}$

$$\partial_t B_\mu(t, x) = D_\nu G_{\nu\mu}(t, x), \quad B_\mu(0, x) = A_\mu(x)$$

GF 耦合: 用 flow 后的能量密度定义重整化耦合

$$g_{\text{GF}}^2(t) = \frac{128\pi^2}{3(N_c^2 - 1)} t^2 \langle E(t) \rangle, \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{8t}}$$

β 函数: 耦合随能标的变化率

$$\beta_{\text{GF}}(g_{\text{GF}}^2) = \mu^2 \frac{dg_{\text{GF}}^2}{d\mu^2} = -t \frac{dg_{\text{GF}}^2}{dt}$$

- flow time 是可以连续调节的能标
- 每个ensemble给出一段连续的跑动
- 方案定义在无限体积、连续极限

$$\beta(g^2) = -g^4 (b_0 + b_1 g^2 + b_2 g^4 + \dots), \quad b_0 = \frac{25}{48\pi^2}, \quad b_1 = \frac{154}{3(16\pi^2)^2} \quad (N_f = 4)$$

弱耦合展开中 b_0 、 b_1 普适, b_2 起依赖scheme

Continuous β function

测量

每个 β_b 、 L 、 t/a^2
得到 g^2_{GF} 与 β_{GF}



① $L \rightarrow \infty$

固定 β_b 与 t/a^2
无限体积外推



② 插值 $\beta(g^2)$

固定 t/a^2
插值到同一个重整化耦合

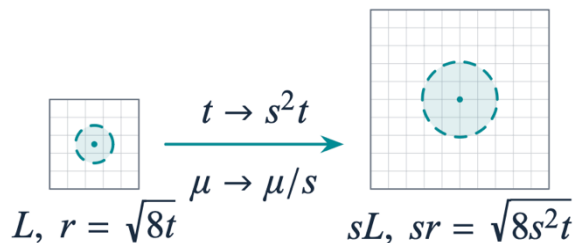


③ $a^2/t \rightarrow 0$

固定 g^2
消除格距效应

有限体积 step scaling

- $c = \sqrt{(8t)}/L$ 固定, 能标由体积决定
- 连续极限: $a/L \rightarrow 0$
- 得到有限步长 s 的离散 β 函数



Continuous β function

- flow 时间与体积无关, 能标 $\mu = 1/\sqrt{(8t)}$
- 先取 $L \rightarrow \infty$, 再取 $a^2/t \rightarrow 0$
- 得到无限体积方案中的局域 β 函数

Lattice setup: $N_f = 4$ MDWF

理论	SU(3), 四个简并的 Möbius 畴壁费米子, $am = 0$; $am_{res} = 7.6 \times 10^{-7}$ ($\beta_b = 8.50$) 、 9.5×10^{-8} ($\beta_b = 4.80$)
规范作用量	树图改进 Symanzik: $c_0 = 5/3$, $c_1 = -1/12$
MDWF, smearing	$L_s = 12$, $b = 1.5$, $c = 0.5$, $M_5 = 1$; stout = 3, $\rho = 0.1$

$L^3 \times 2L$: N_{cfg}

β_b	$16^3 \times 32$	$24^3 \times 48$	$32^3 \times 64$
4.70*	In preparation ($am \neq 0$)		
4.80	321	220	230*
5.20	273	272	254
5.50	331	272	253
6.00	335	273	252
7.00	401	275	255
8.50	331	271	191
10.00	In preparation		

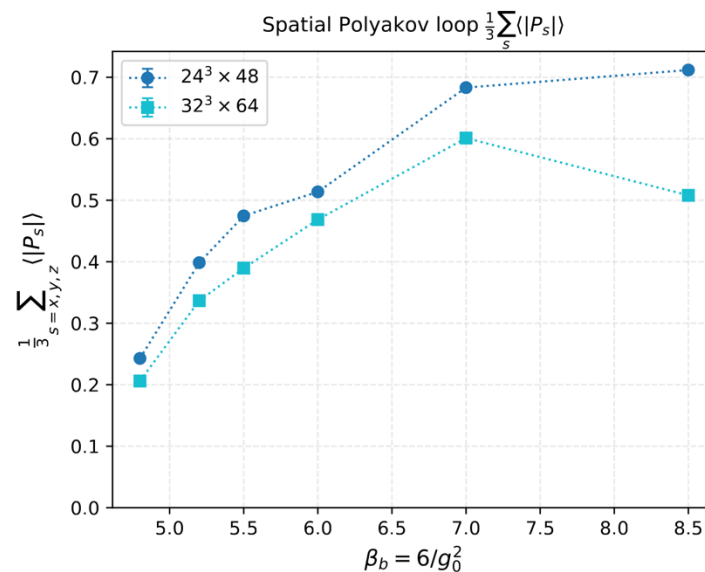
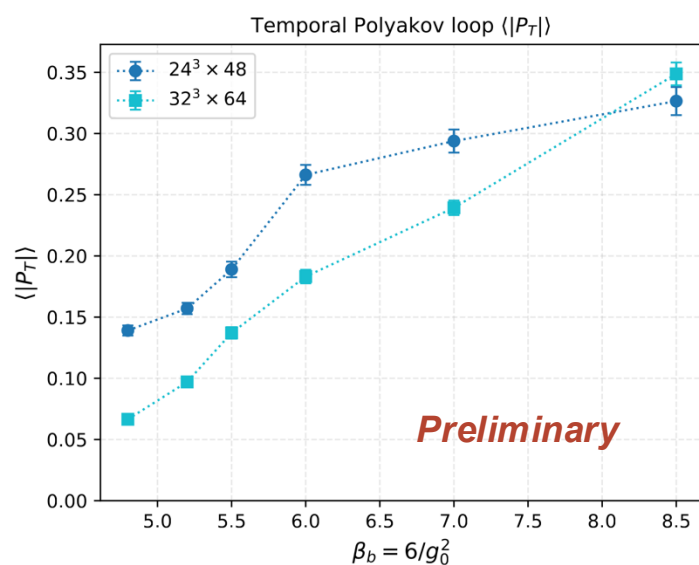
*crossover region

- trajL = 2 MDTU, 每 80 ~ 100 MDTU 存一个组态
- flow step = $0.04 a^2$, $\max(t/a^2) = 8$
- 能量密度的三种离散化: plaquette、clover、Symanzik
- 误差分析: Γ -method

费米子: 空间周期、时间反周期
Wilson 与 Zeuthen flow

Polyakov loop test

Polyakov loop at flow time $t/a^2 = (L_s/a)^2/32$



- deconfined 小体积区: $m = 0$ 可以模拟; 有限体积修正 $\sim (a/L)^4$
- confined 区: 禁闭提供红外截断, 体积依赖被压低
- 过渡区: 两种形式都不适用

- β_b 减小、体积增大时 Polyakov loop 下降

在 flow 时间 $t/a^2 = (L/a)^2/32$ 测量 Polyakov loop expectation (Wilson flow)

$\beta_b = 4.80$ 、 $32^3 \times 64$: 最接近 crossover

g_0^2 树图归一化

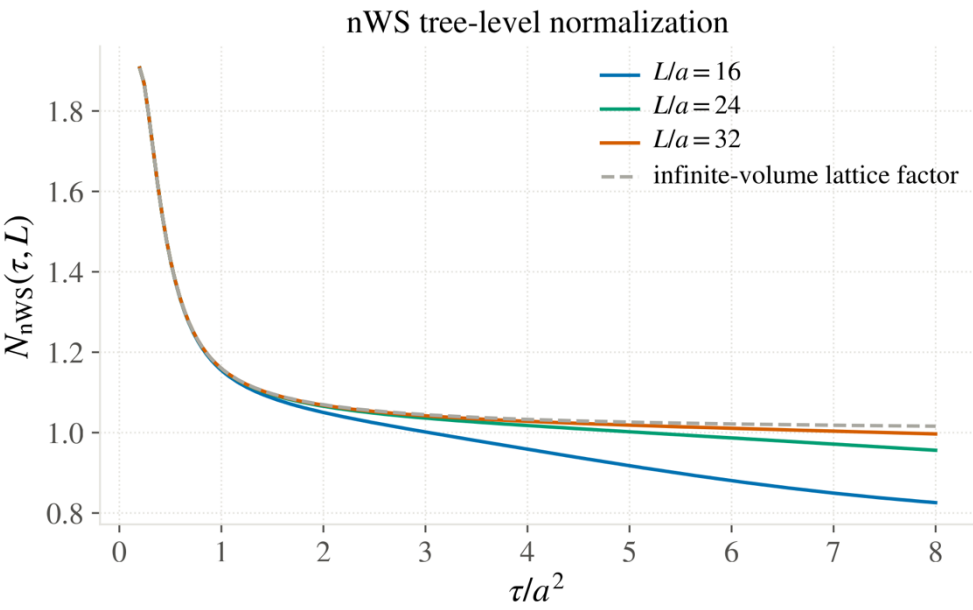
cutoff 效应来源: flow、规范作用量、能量密度算符
树图阶可精确计算

$$g_{GF}^2(t; L, \beta_b) = \frac{16\pi^2}{3} \frac{t^2 \langle E(t) \rangle}{\mathcal{Z}(t)}$$
$$\mathcal{Z}(t) = \frac{64\pi^2}{3} \frac{t^2}{V} \sum_{p \neq 0} \text{Tr} \left[e^{-tK^f(p)} D(p) e^{-tK^f(p)^T} \mathcal{S}^e(p) \right]$$

nWS: Wilson flow + Symanzik operator 能量密度

$$\mathcal{Z}_{nWS}(t) = \frac{64\pi^2 t^2}{V} \sum_{p \neq 0} e^{-2t\hat{p}^2}, \quad \hat{p}_\mu = 2 \sin \frac{p_\mu}{2}$$

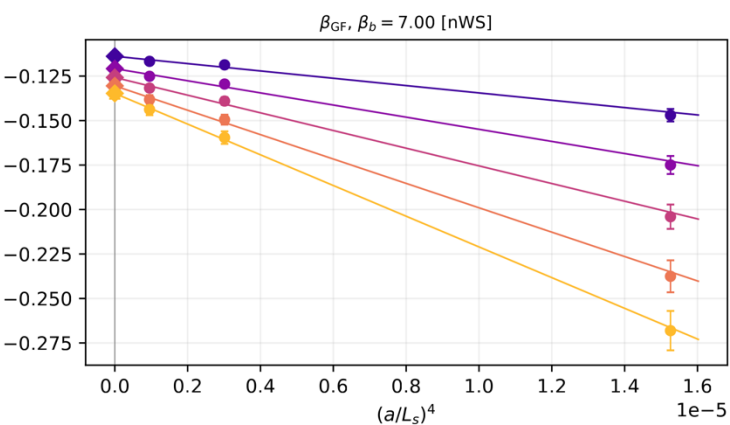
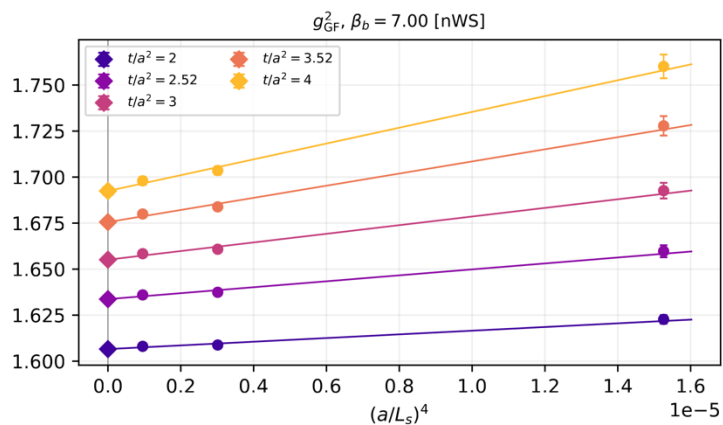
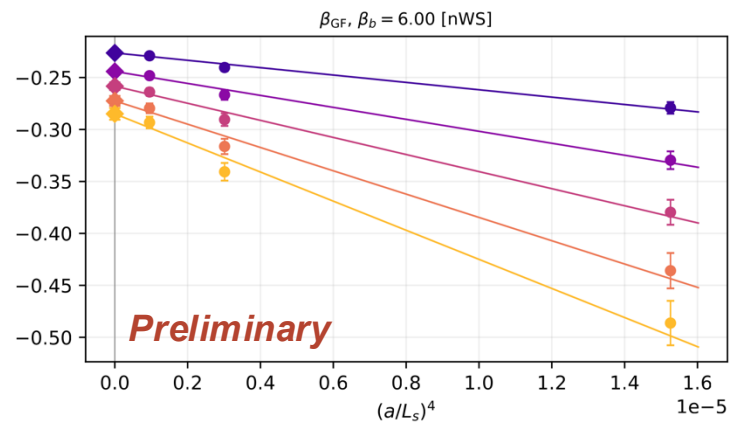
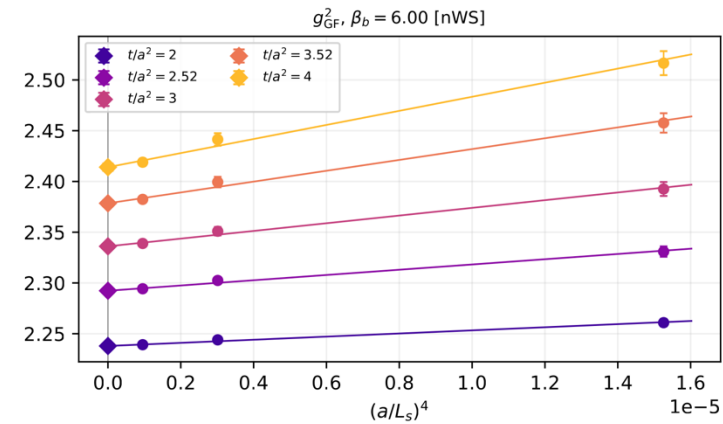
- 同时去除树图阶的 a^2/t 效应与有限体积效应



验证: $Z = 1 + C_2 a^2/t + \dots$ ($24^3 \times 48$)

flow – 作用量 – 算符	拟合 C_2	解析值
Wilson – Wilson – clover	-0.0447	$-1/24 \approx -0.0417$
Zeuthen – Symanzik – clover	-0.2241	$-2/9 \approx -0.2222$
Zeuthen – Symanzik – Symanzik	+0.0002	0 (精确改进)

无限体积外推



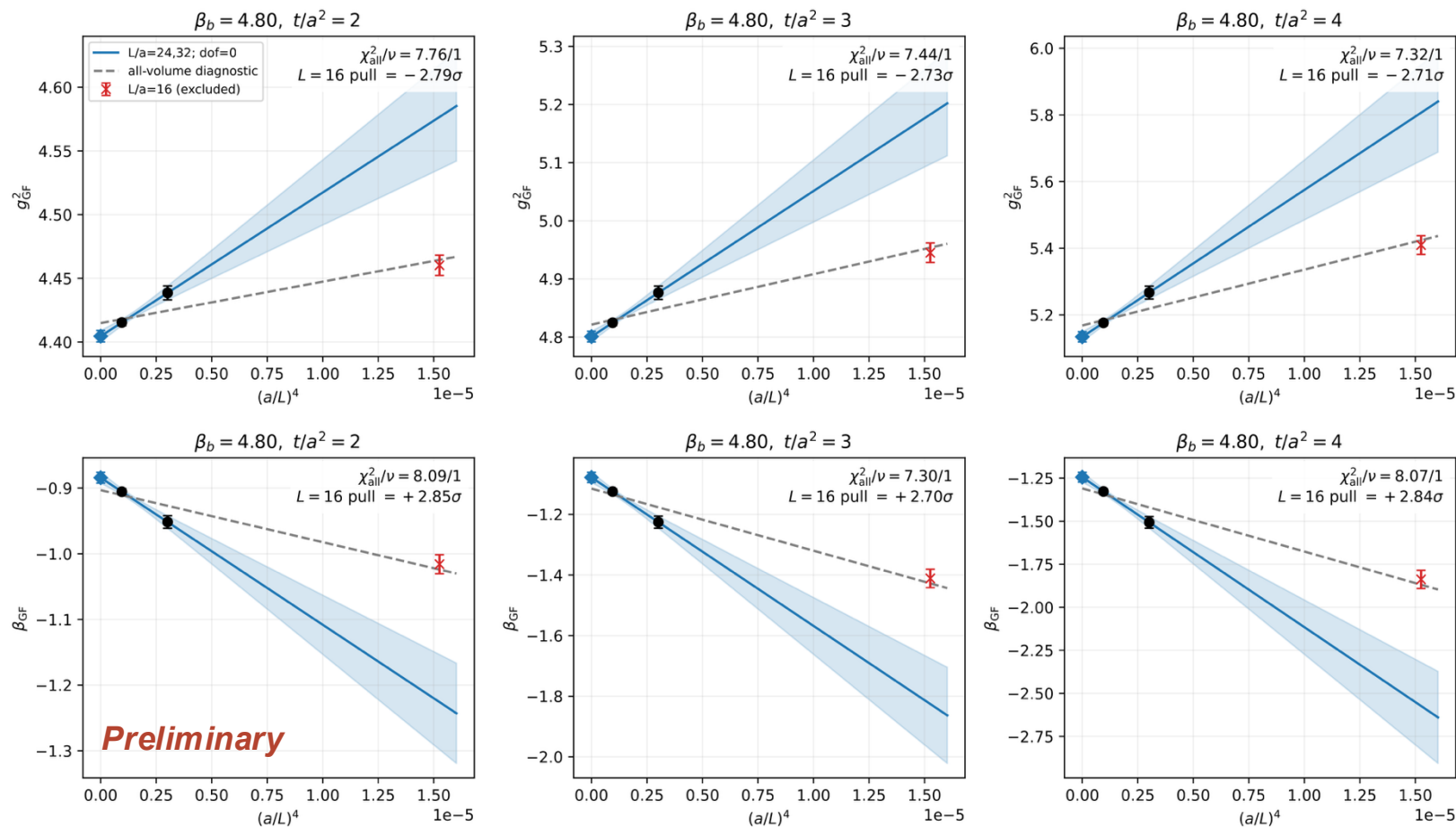
$$\mathcal{O}(L) = \mathcal{O}_\infty + A_{\mathcal{O}} \left(\frac{a}{L} \right)^4, \quad \mathcal{O} = g_{GF}^2, \beta_{GF}$$

- g^2 与 β 分别外推; 固定裸耦合

eg: $\beta_b = 6.00$, $t/a^2 = 3$
 $\beta_\infty = -0.2583(37)$, $\chi^2/\text{dof} = 1.94/1$

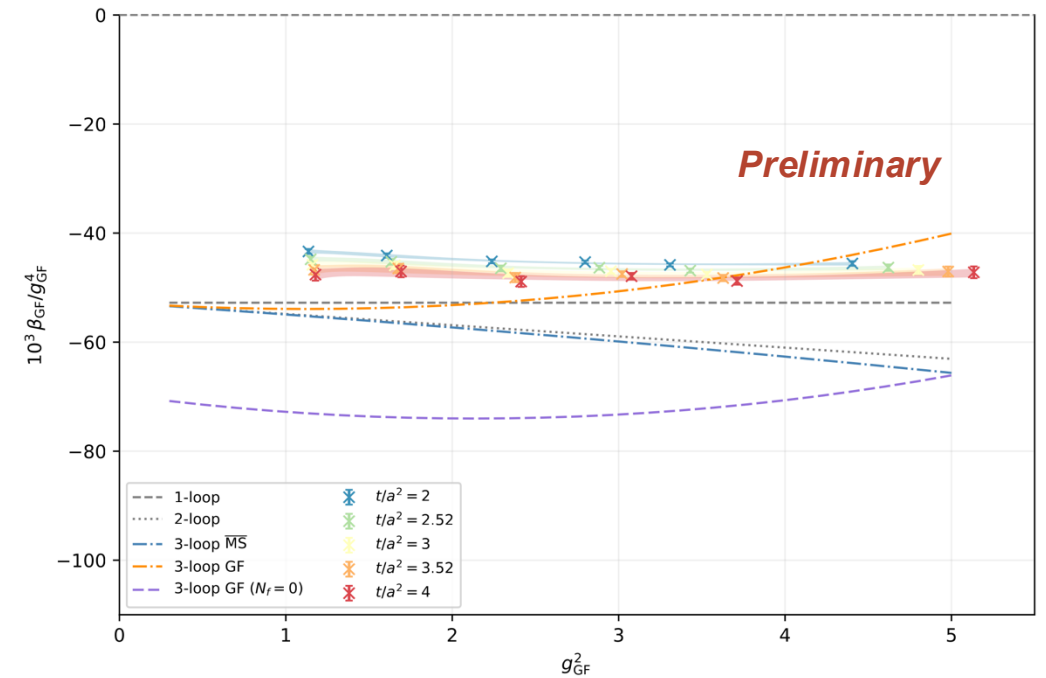
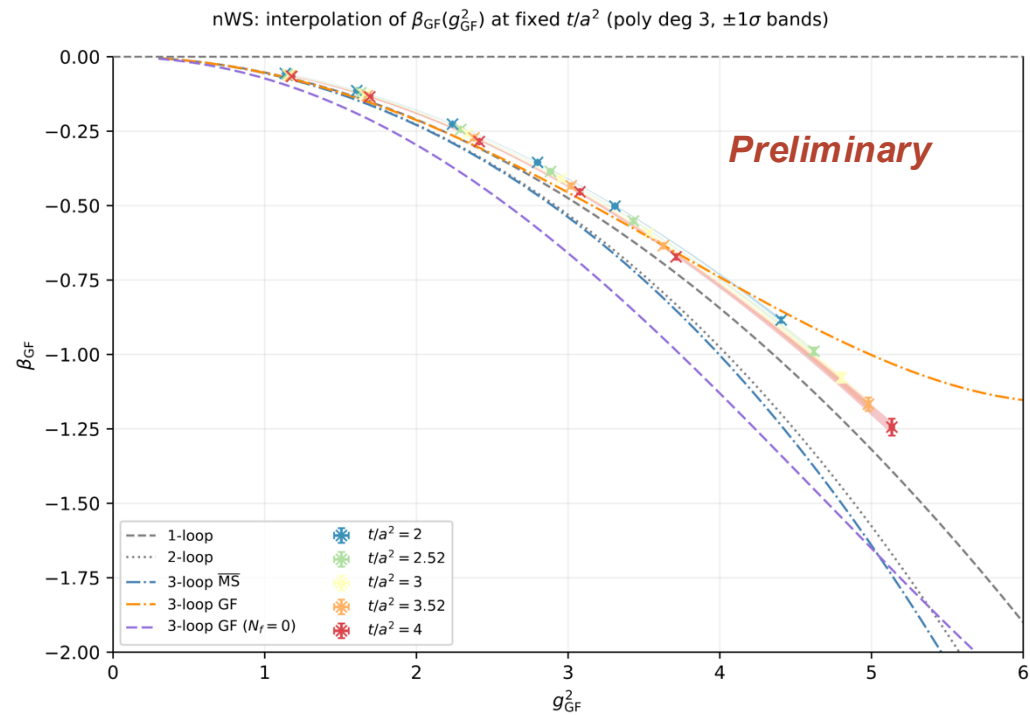
$\beta_b = 4.80$ case

nWS: volume selection at strongest bare coupling; main intercept from $L/a=24,32$



与 Polyakov loop 显示 $\beta_b = 4.8$ 最接近 crossover 相符

β - g^2 插值

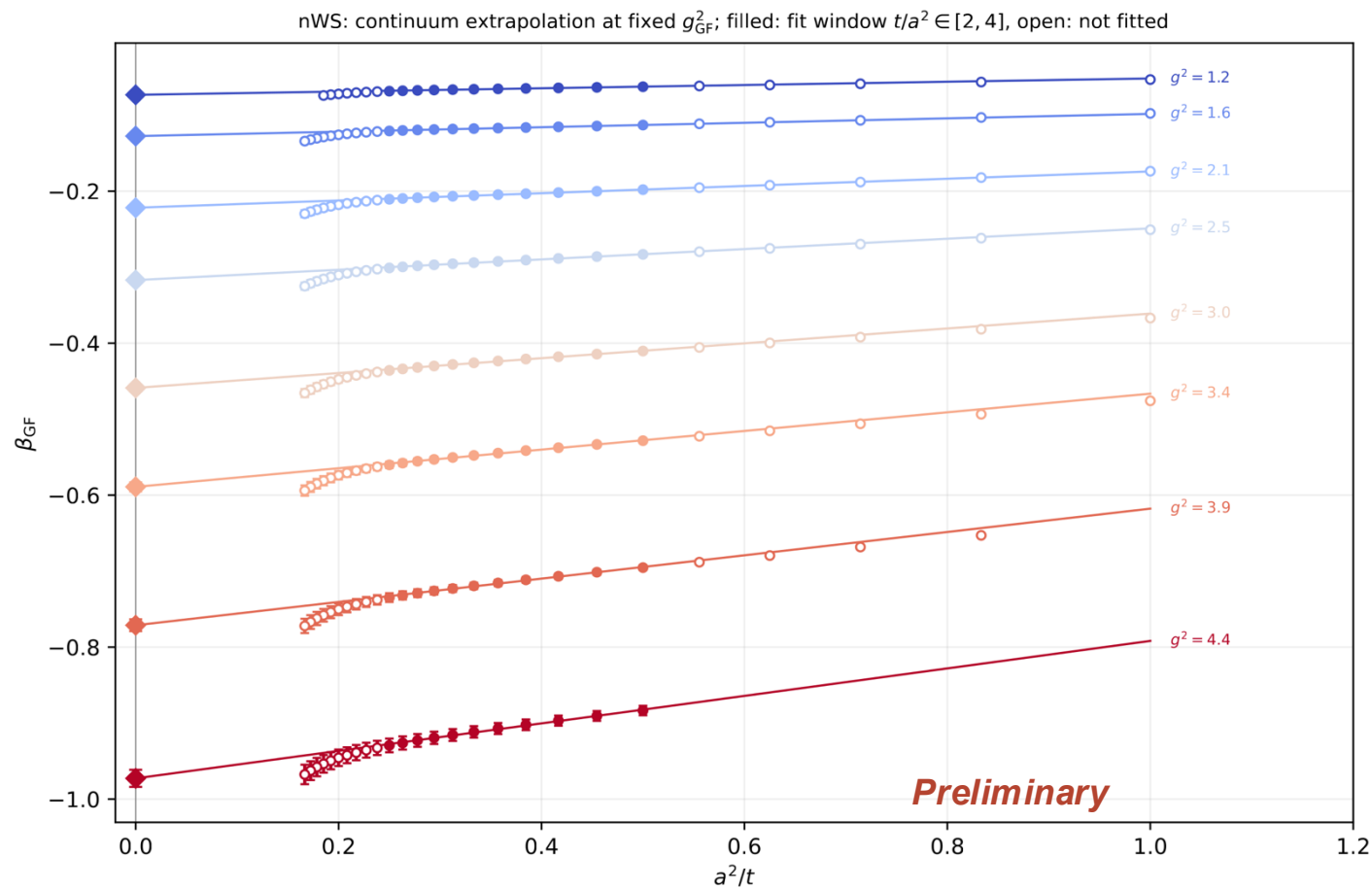


$$\beta_{\infty}(g^2) = \sum_{k=0}^3 c_k g^{2k}$$

- 三次多项式; g^2 的误差及其与 β 的关联进入拟合
- χ^2/dof : 1.30/2 ($t/a^2 = 2$) ; 2.75/2 ($t/a^2 = 4$)

- 微扰TBD
- 系统误差: 二次、四次多项式

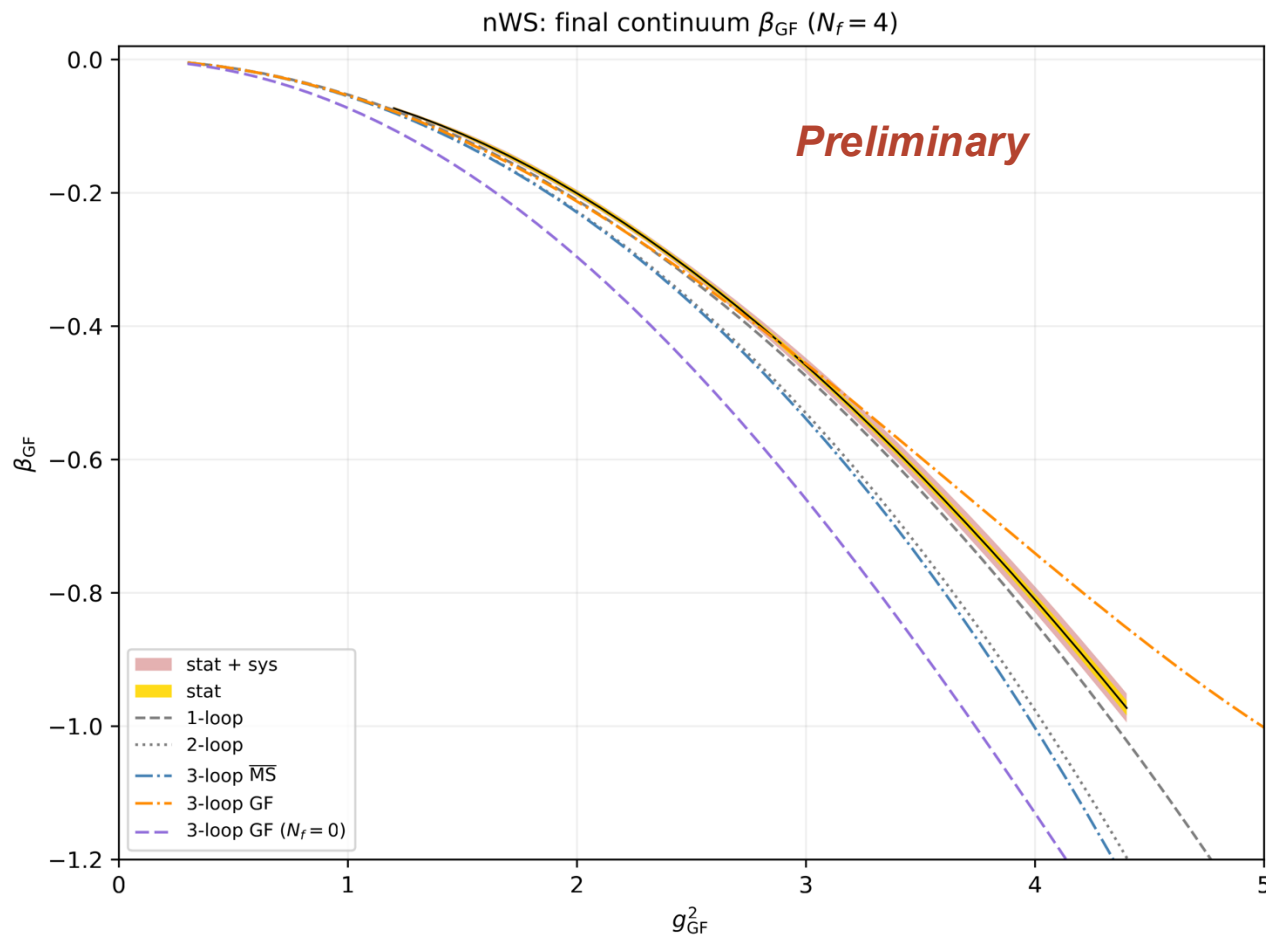
连续极限 $a^2/t \rightarrow 0$



$$\beta_{GF}\left(g^2; \frac{a^2}{t}\right) = \beta_{GF}^{\text{cont}}(g^2) + c(g^2) \frac{a^2}{t}$$

- Flow window $t/a^2 = 2.0\text{--}4.0$, step = 0.2
- $1.2 \leq g^2 \leq 4.4$

β - g^2



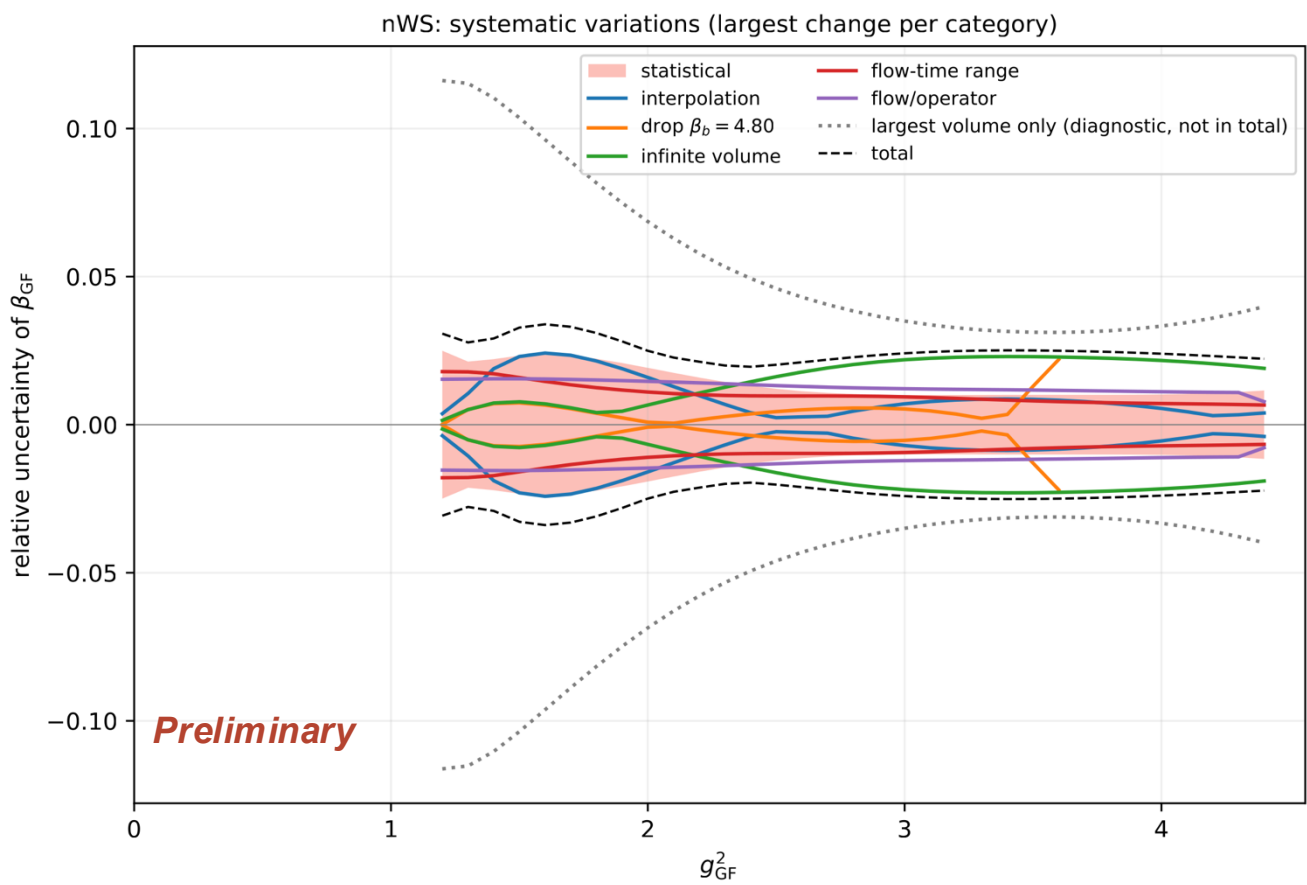
g_{GF}^2	β_{GF}
1.5	-0.1121(26)(37)
2.5	-0.3170(38)(64)
3.5	-0.6238(63)(156)
4.0	-0.8100(83)(194)

- nWS, $L^3 \times 2L$
- 对应的能标变化~ 403 倍:

$$\ln \frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}} = \frac{1}{2} \int_{1.2}^{4.4} \frac{dg^2}{|\beta_{GF}(g^2)|} \approx 6.0$$

$$\alpha_{GF} = g^2/4\pi: 0.35 \rightarrow 0.095$$

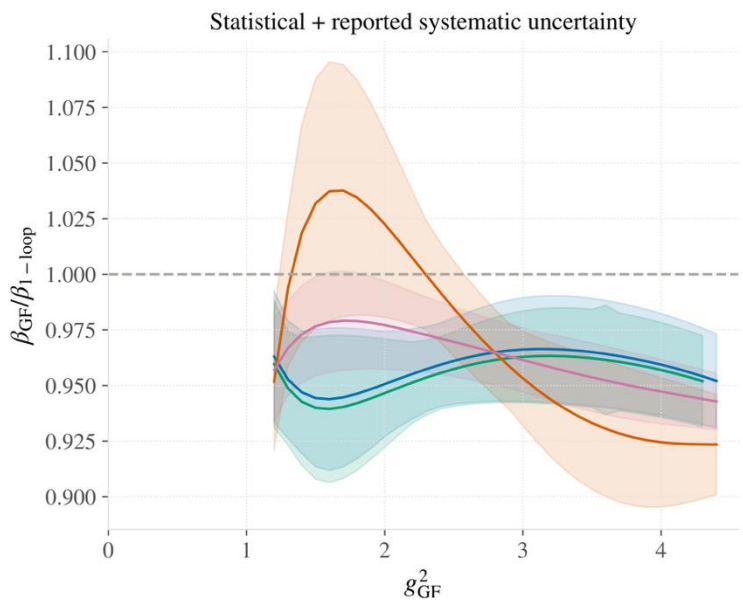
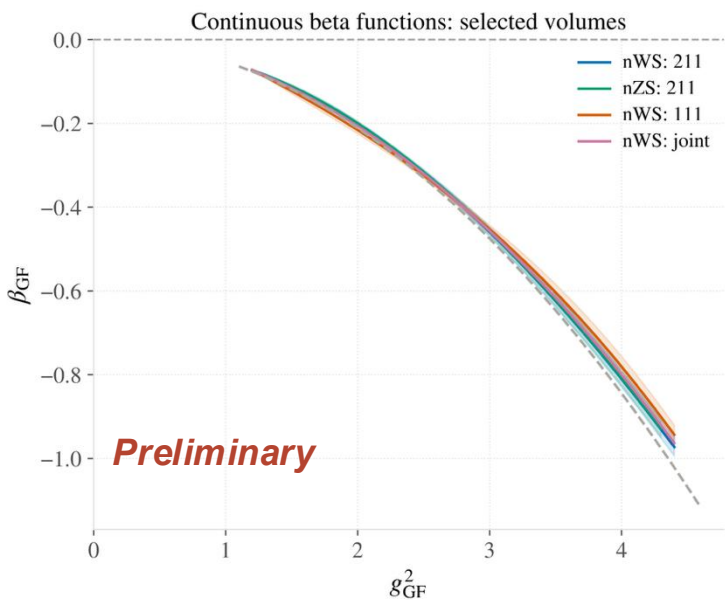
系统误差



类型	变动
插值	多项式取 2 次、4 次
去掉 $\beta_b = 4.80$	只用其余 5 个裸耦合
无限体积	去掉最小体积
flow time window	$t_{\min}/a^2 = 1.52, 1.76$; $t_{\max}/a^2 = 4.52, 5$
flow / 算符	nWW、nWC、nZW、nZC、nZS

- 总误差：统计误差与最大的单项系统误差平方相加
- 弱耦合端以插值为主， $g^2 \geq 2.4$ 以体积外推为主

flow 离散化 check



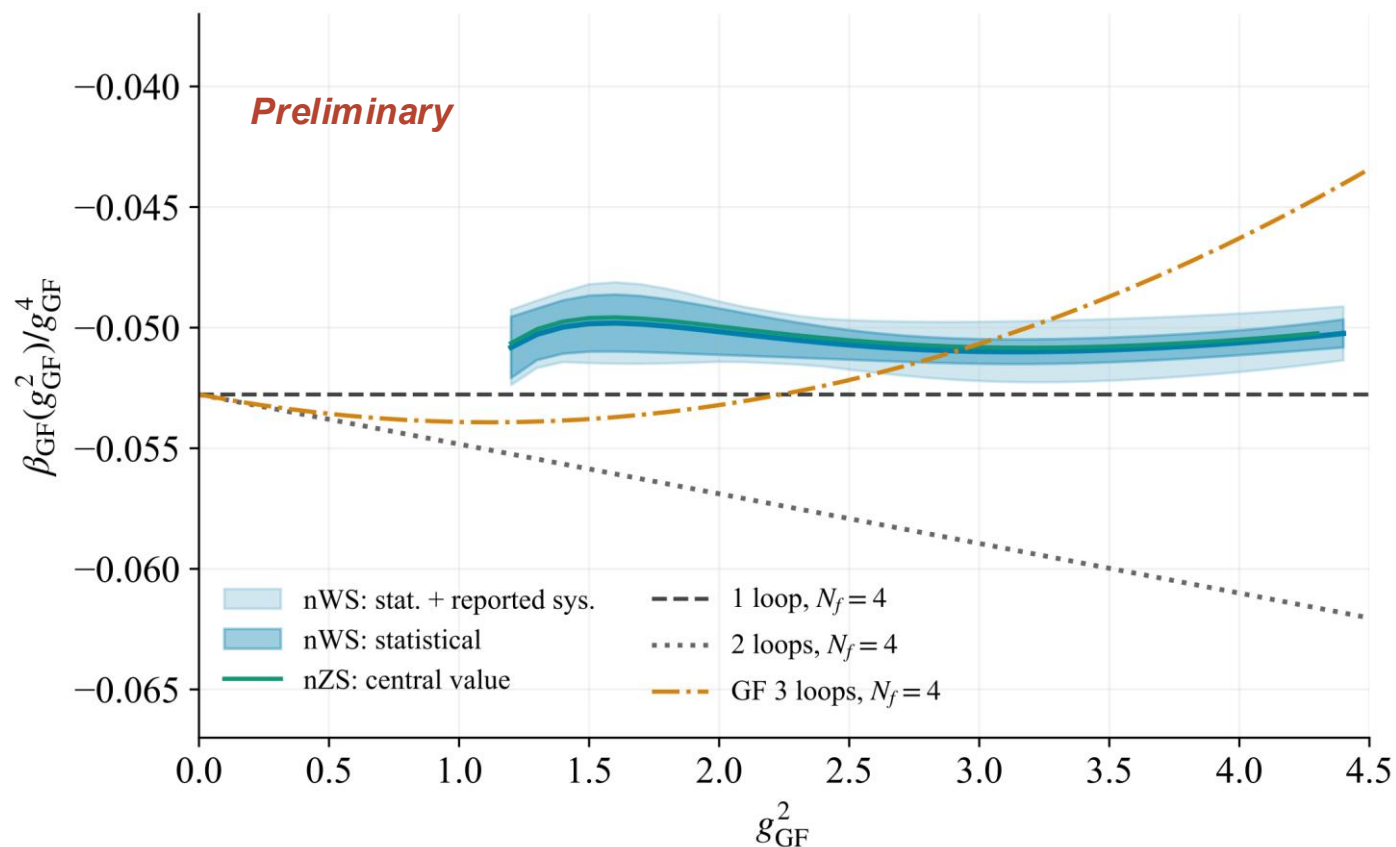
与一圈结果的比值

g^2	nWS	nZS
1.5	-0.1121(26)(37)	-0.1116(27)(38)
2.5	-0.3170(38)(64)	-0.3158(39)(55)
3.5	-0.6238(63)(156)	-0.6220(64)(143)
4.0	-0.8100(83)(194)	-0.8080(84)(180)

β_{GF}

- 两种 flow (Wilson & Zeuthen) 都使用 Symanzik 能量密度和 $\ln$
- 中心值相差不到 0.5%，远小于统计误差

与微扰论比较

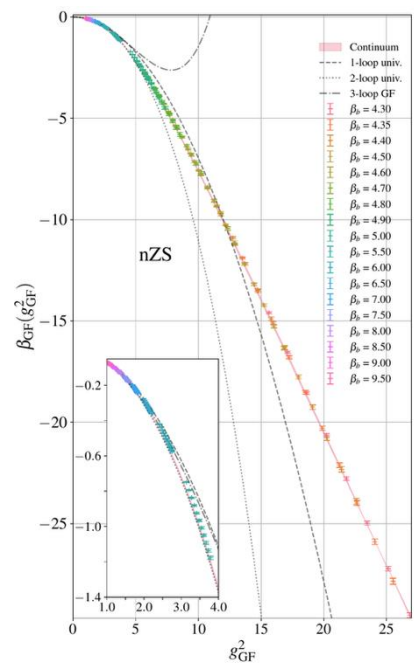


$$\frac{\beta_{GF}(g^2)}{g^4} = - \left(b_0 + b_1 g^2 + b_2^{GF} g^4 + \dots \right) \xrightarrow{g^2 \rightarrow 0} -b_0$$

$$b_0 = \frac{25}{48\pi^2} \simeq 0.0528 \quad (N_f = 4)$$

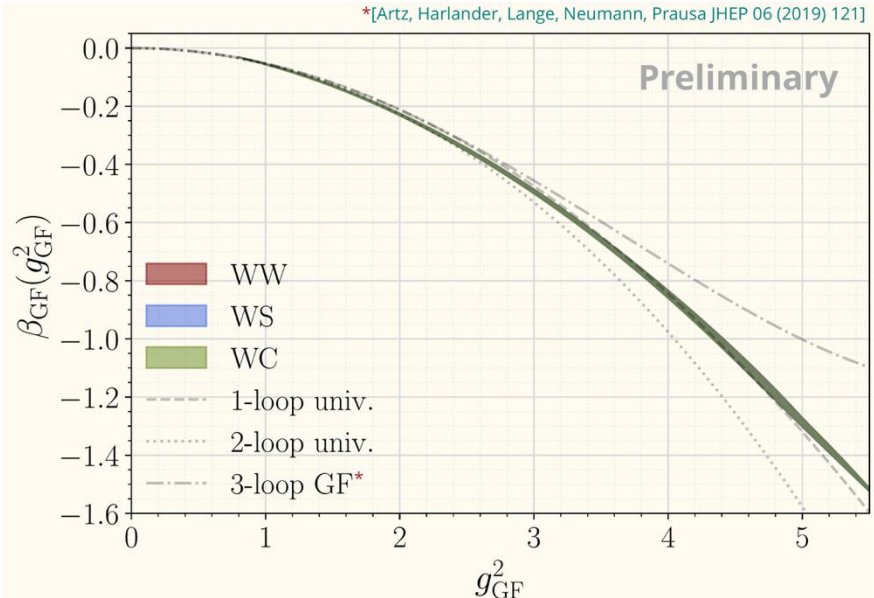
- 三圈系数 b_2 依赖scheme, 这里用 GF 值
- 衔接微扰区还需要更弱耦合组态 ($\beta_b = 10.00$)

不同action比较



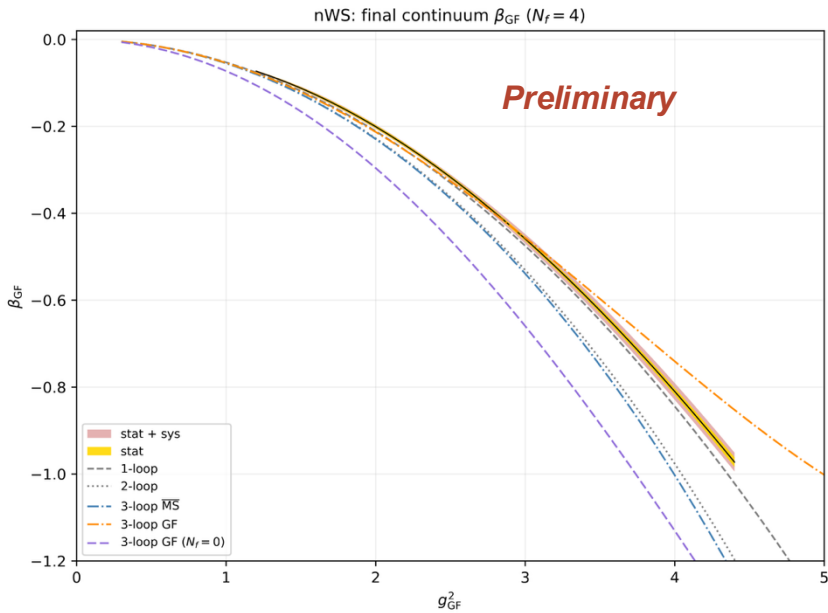
纯规范 SU(3), $N_f = 0$

$1.2 \leq g^2 \leq 27$, 已延伸到 t_0



$N_f = 4$, HISQ

Peterson, Lattice 2026; 初步结果



$N_f = 4$, MDWF (本工作)

nWS, $L^3 \times 2L$

HISQ 与 MDWF 研究同一个连续理论

总结与展望

总结

- 在无质量 $N_f = 4$ MDWF 组态上进行了 continuous β function 的分析
- 得到 $1.2 \leq g^2 \leq 4.4$ 的连续极限 β 函数, 总误差 2% 到 3.4%, 覆盖能标约 403 倍
- Polyakov loop 确认 $\beta_b = 4.80$ 接近 crossover

展望

- 弱耦合端: $\beta_b = 10.00$ 的组态, 衔接微扰区
- 强耦合端: $\beta_b = 4.60$ 、 4.70 ; confined 区生成更小体积组态达到 deconfined, 或手征外推
- 延伸到强子标度, 确定 $N_f = 4$ 的 Λ parameter; 与 HISQ crosscheck

谢谢!