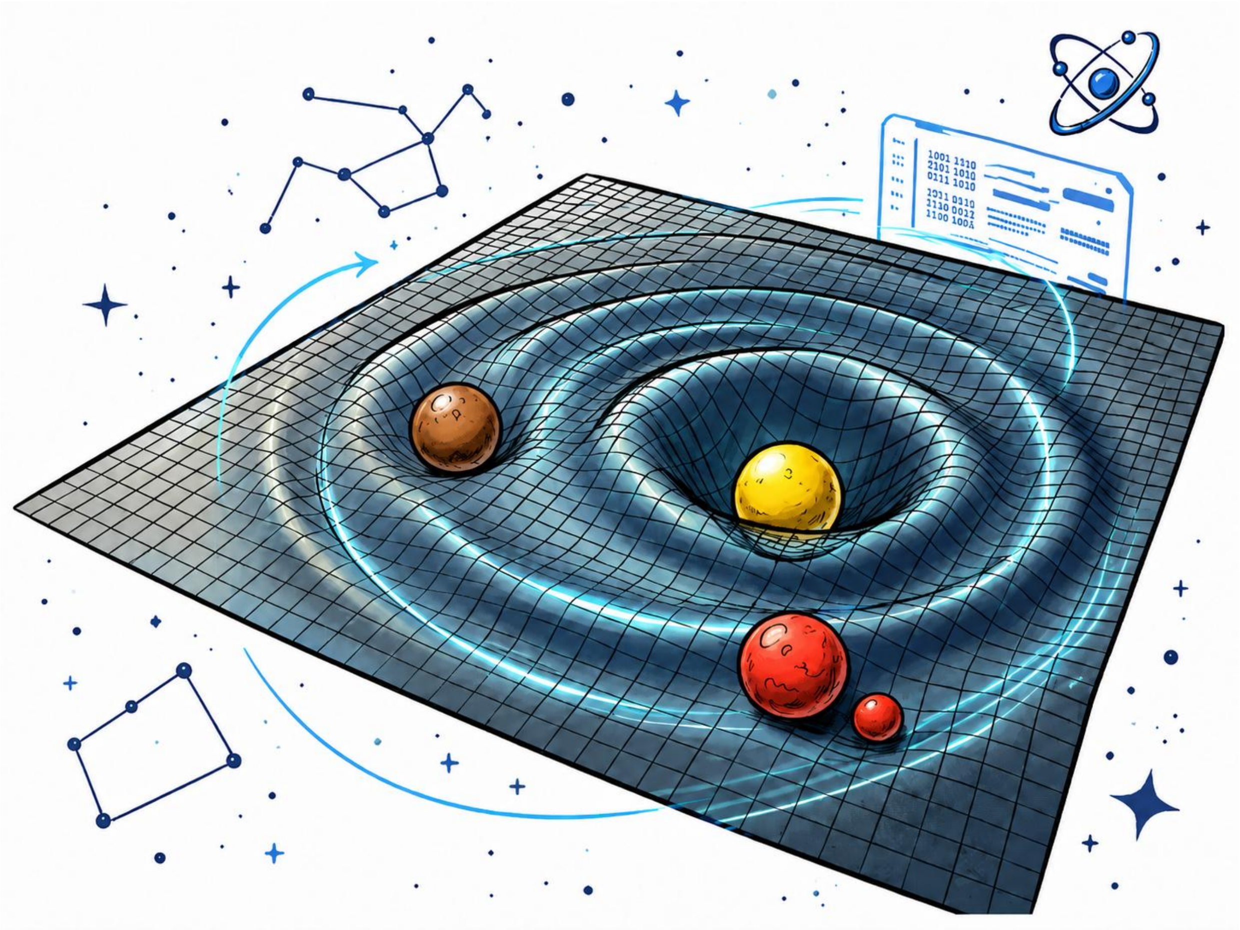
电弱相变基础：

从早期宇宙到引力波观测

王宏昕

@Henan Normal University

2026.7.11



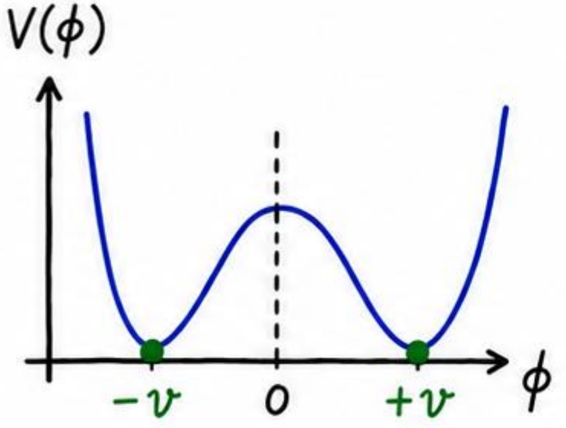
电弱相变在宇宙演化中的位置

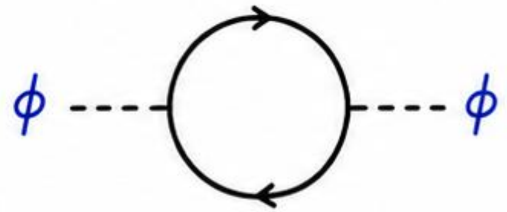
电弱相变在宇宙演化中的位置

问题一：电弱相变是什么？

问题二：电弱相变如何计算？

问题三：电弱相变如何观测？

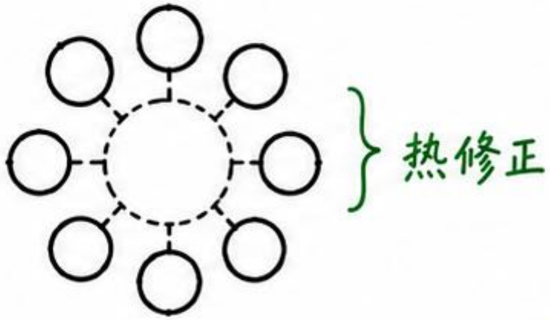




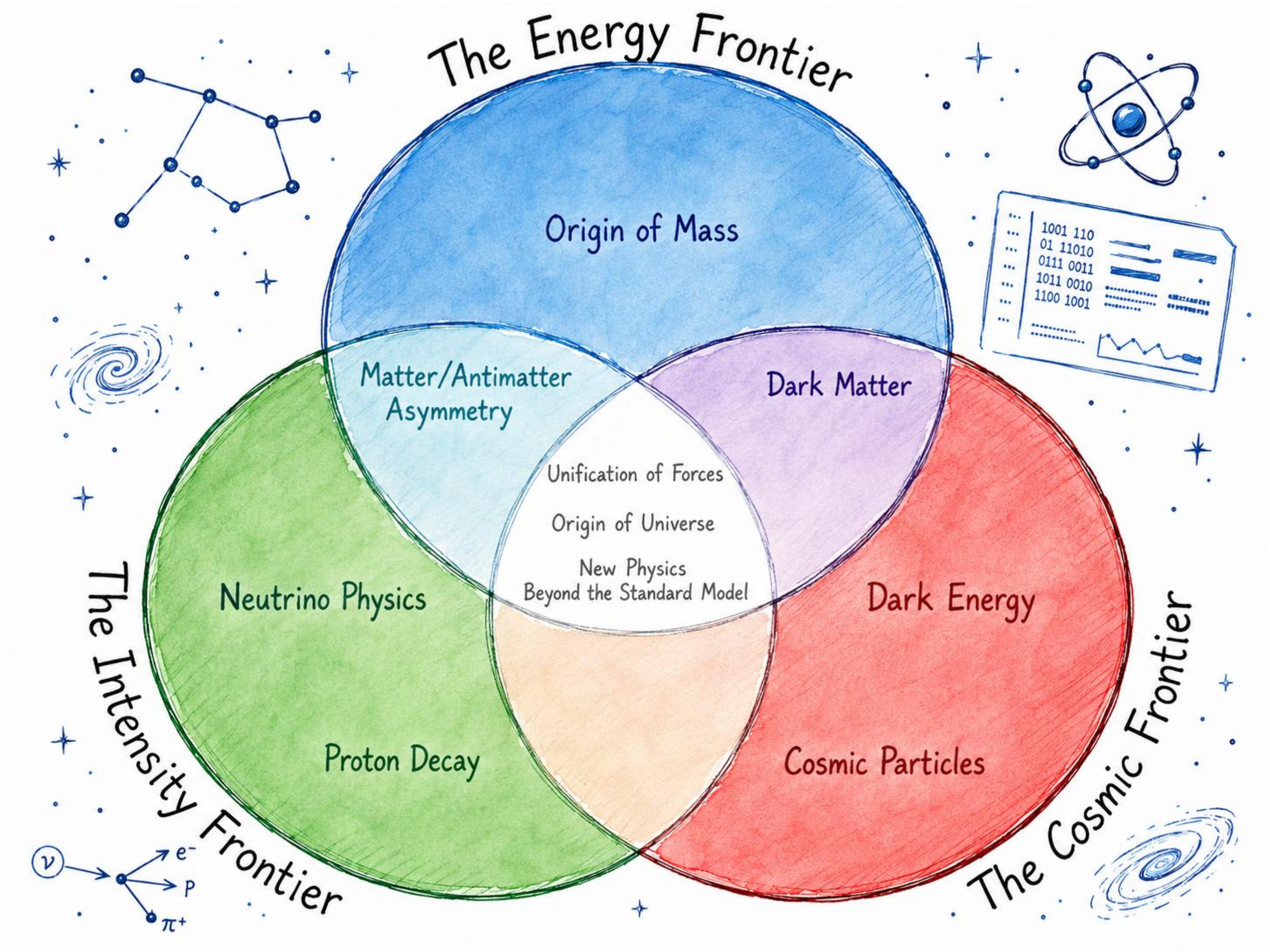
为什么电弱相变重要?

$$\beta = \frac{1}{T}$$

$$V_{eff} = V_0 + V_{CW} + V_T + V_{daisy}$$



当前粒子物理领域三大研究前沿



标准模型的成功与不足

1 物质–反物质不对称
• 观测到重子不对称
• 标准模型中的 CP 破坏不足
2 暗物质
• 有强有力的天体物理证据
• 标准模型中没有合适候选者
标准模型
SU(3) × SU(2) × U(1)
实验上非常成功
3 规范等级 / 自然性问题
• 希格斯质量稳定性
• 需要更深层解释
需要新物理
E = mc²
V(ϕ)
ϕ
γ
e⁻
e⁺
H
f
f
标准模型虽然非常成功，但仍无法解释若干重大谜题。

为什么标准模型电弱相变不够强?

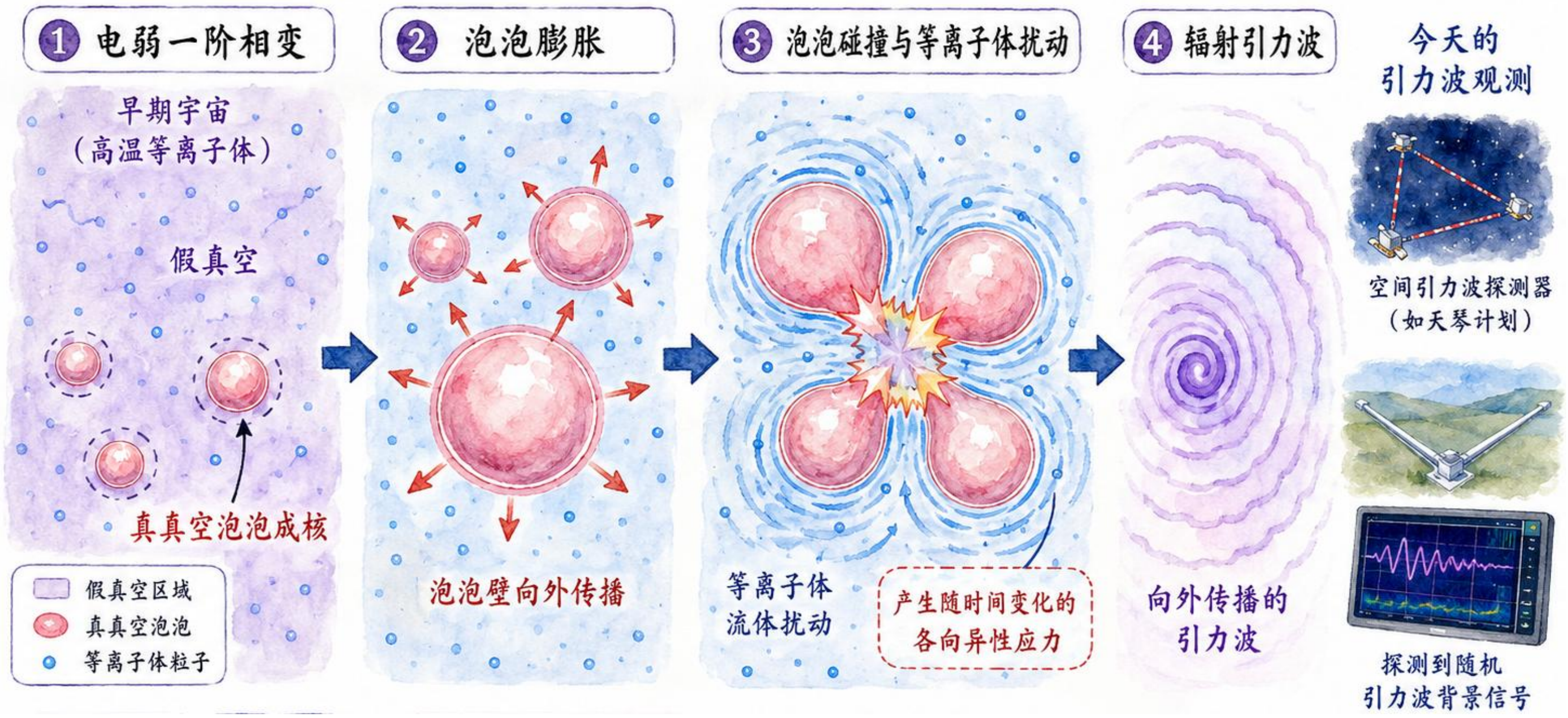
在 mh≃125 GeV 的标准模型中，电弱相变不是一阶相变，而是 crossover!

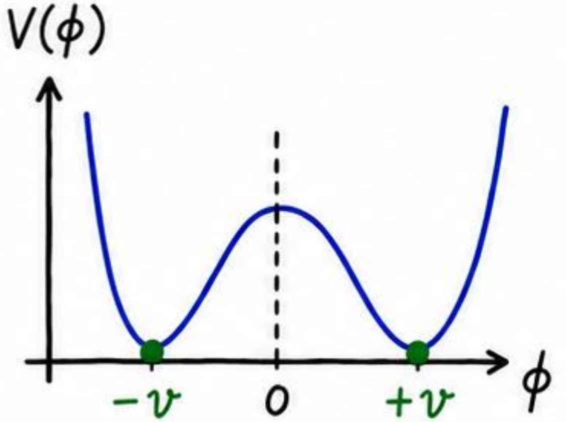
New Physical Model

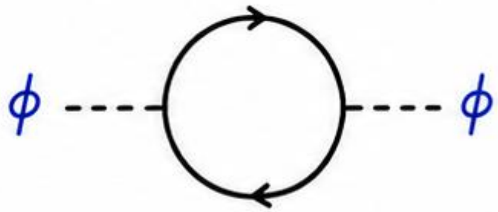
First-order Phase Transitions in The Early Universe

Gravitational Wave Background

TianQin/Taiji /LISA



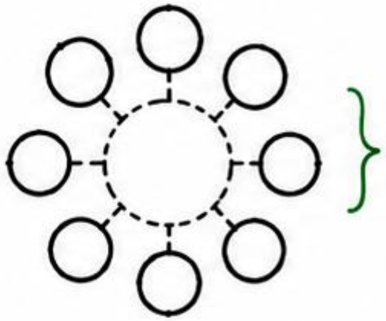




电弱相变的基本图像

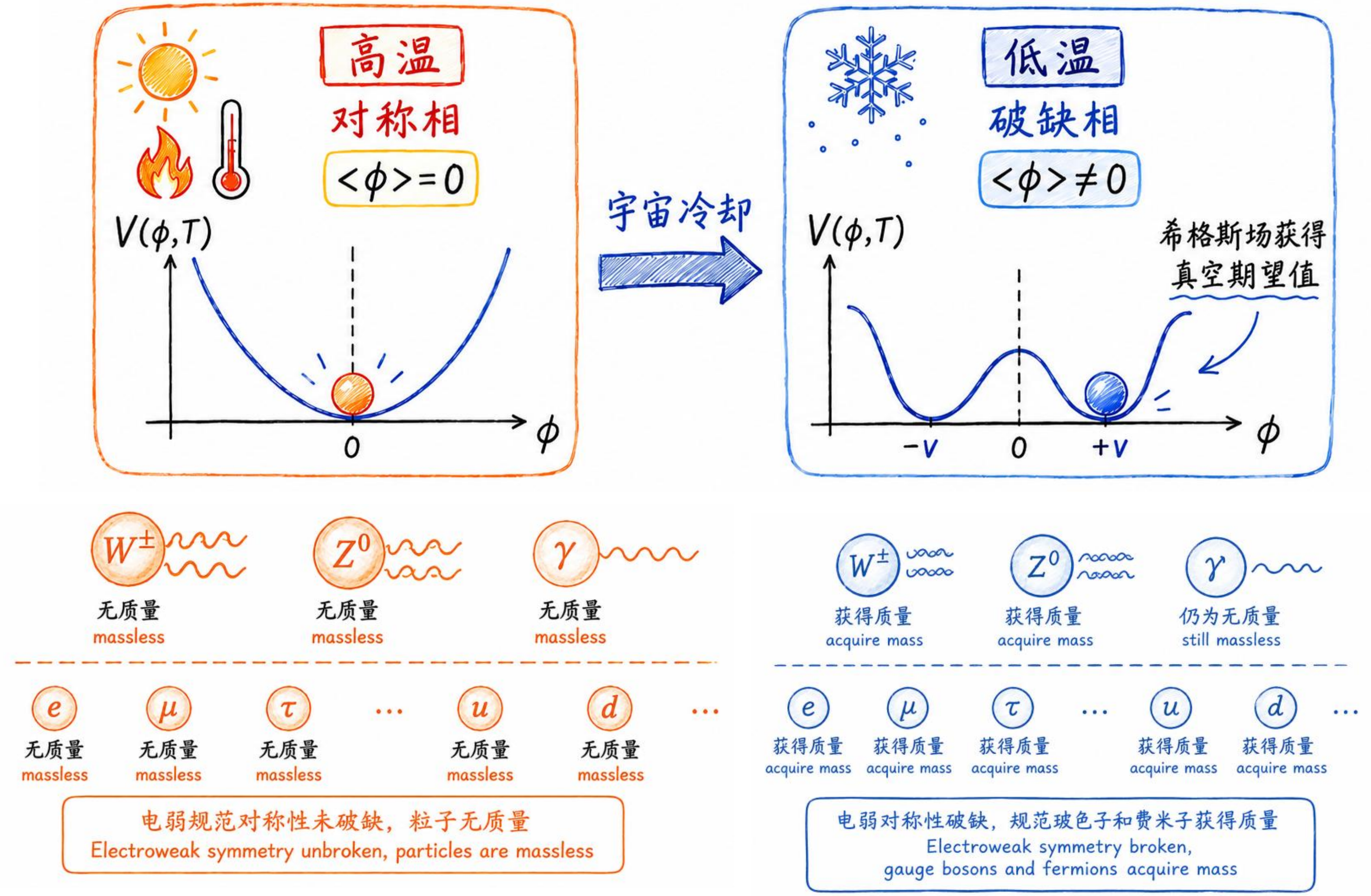
$$\beta = \frac{1}{T}$$

$$V_{eff} = V_0 + V_{CW} + V_T + V_{daisy}$$



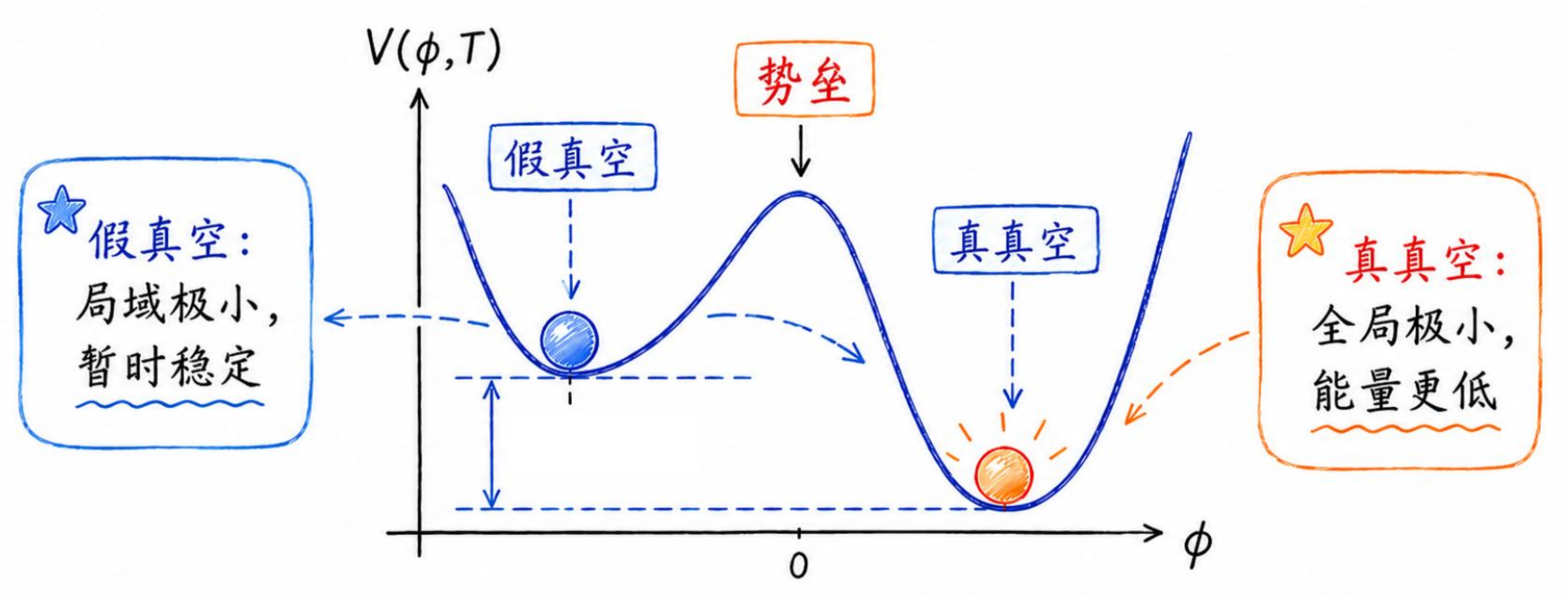
热修正

高温对称相与低温破缺相



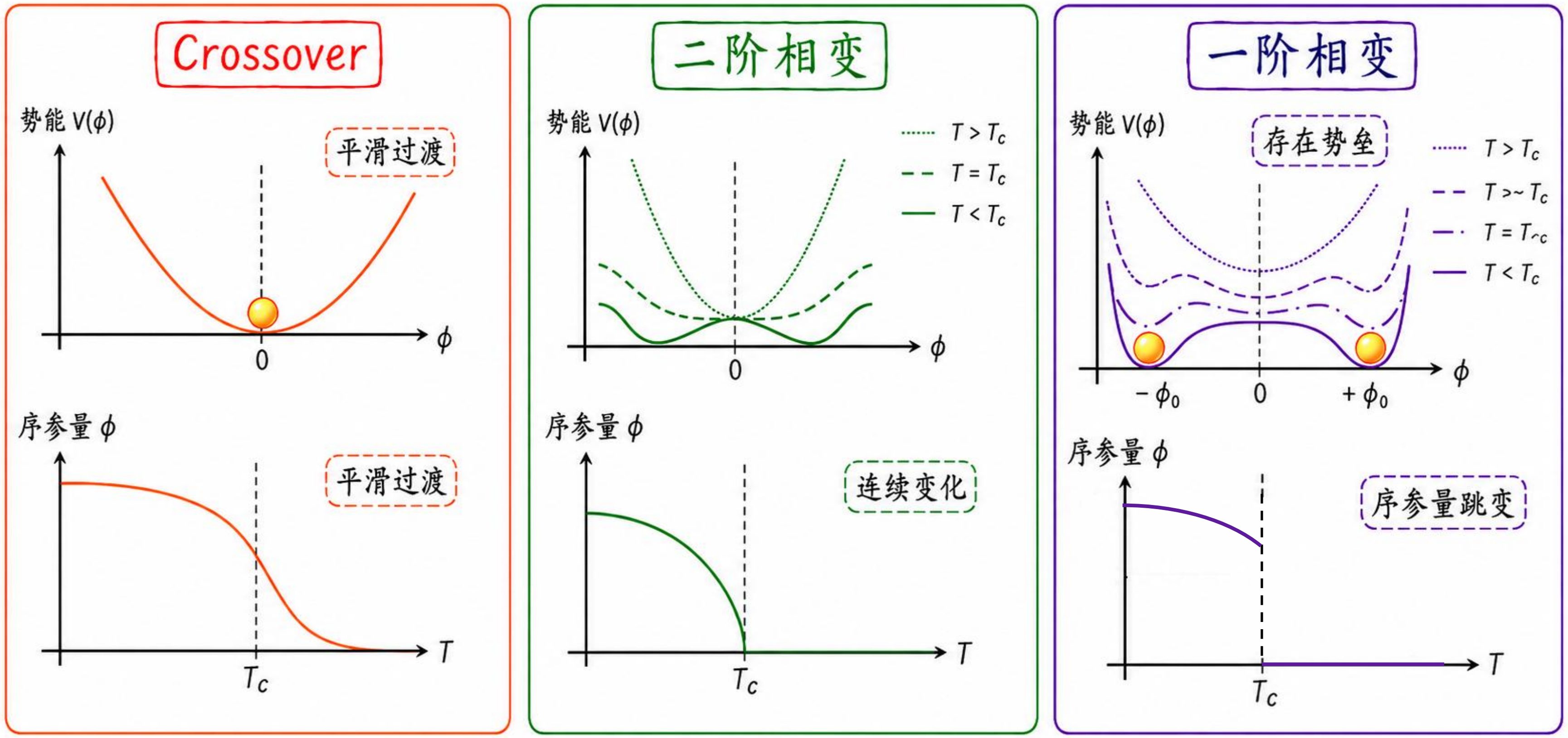
随着温度降低，电弱对称性从对称相过渡到破缺相

真真空、假真空、势垒



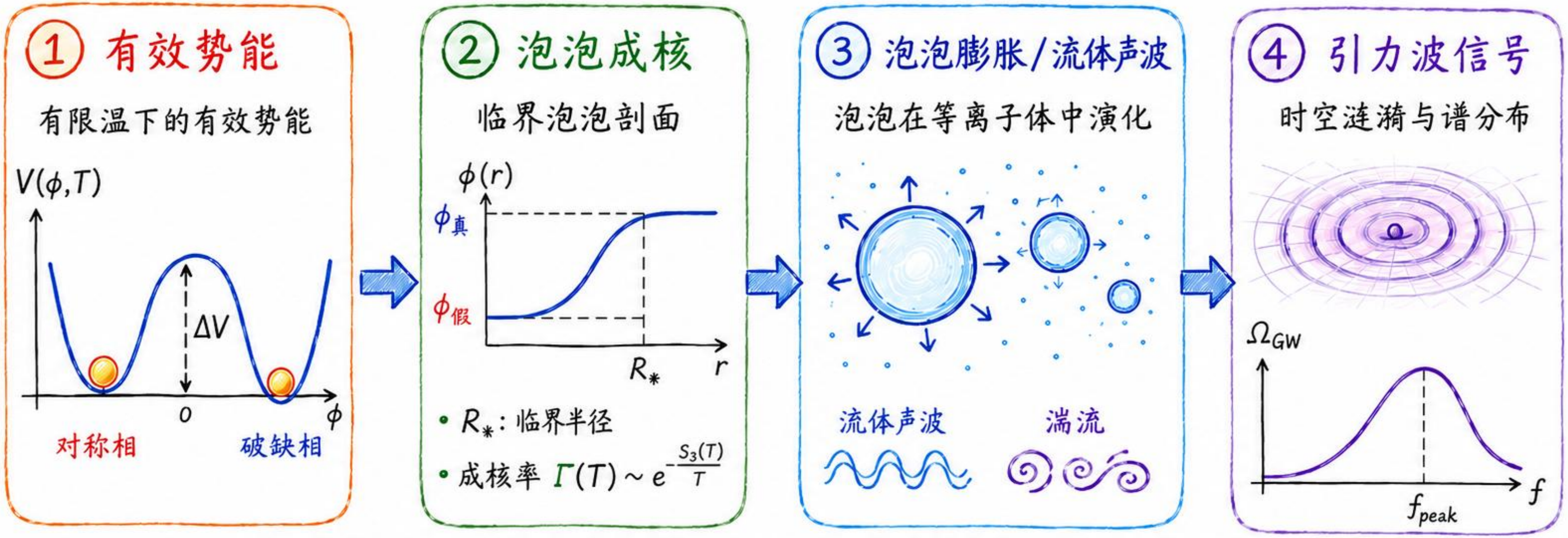
一阶相变常对应两个真空之间存在势垒，系统可先停留在假真空中

crossover、二阶、一阶相变对比



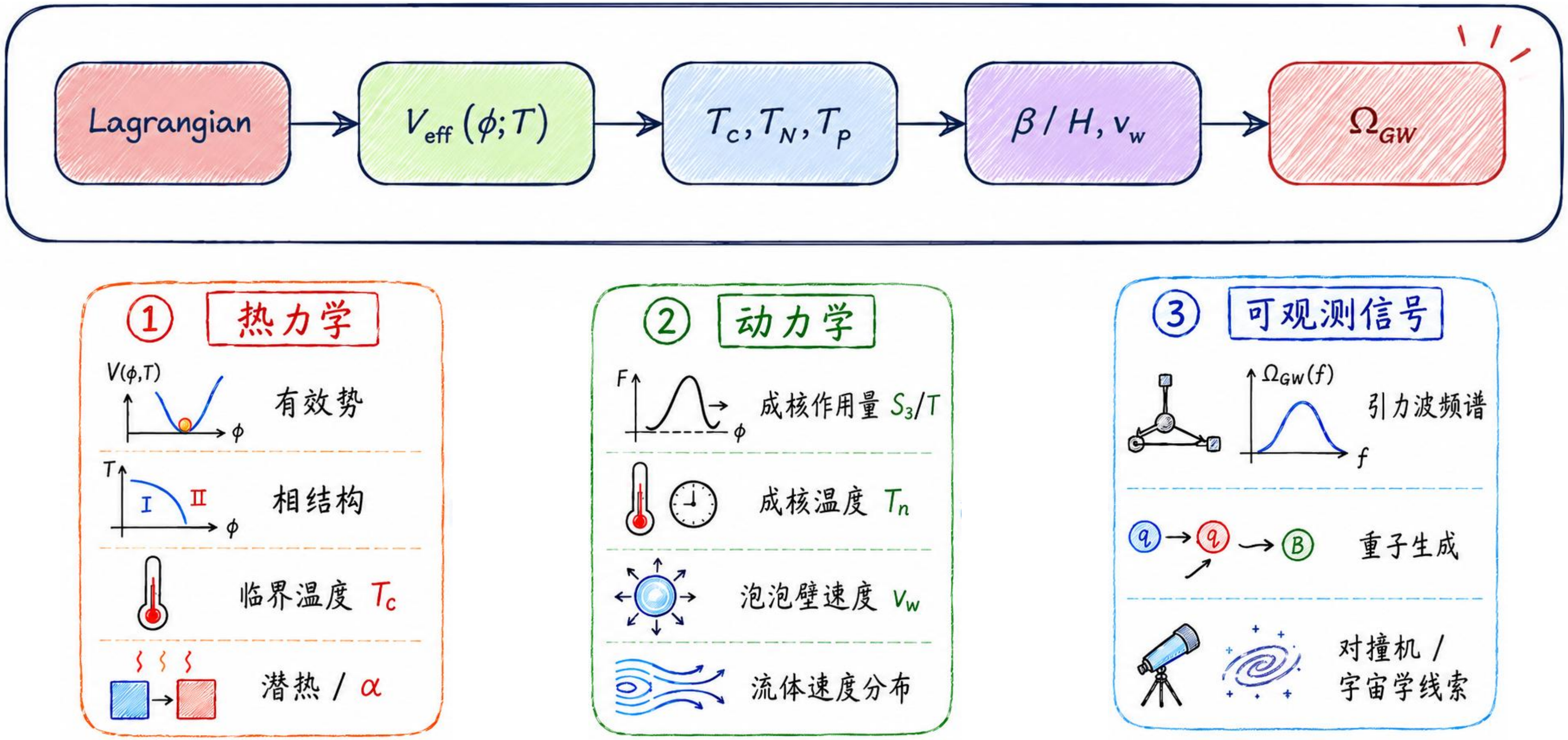
区别的关键在于:是否存在势垒，以及序参量在临界点附近如何变化。

从有效势能到泡泡再到引力波

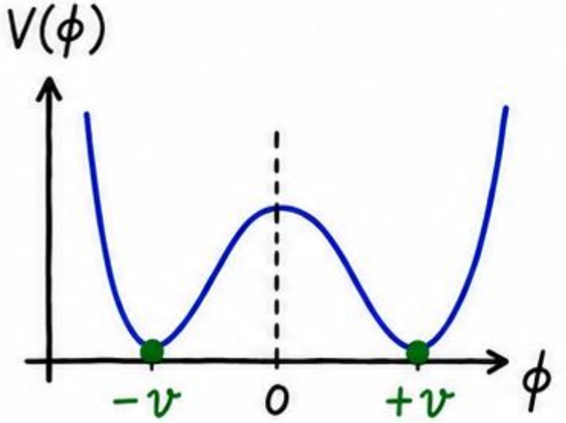


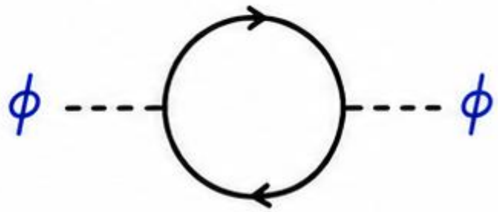
电弱相变的微观势能结构最终会影响泡泡演化，并可能留下引力波信号

电弱相变研究流程



✧ 从理论结构到宇宙信号 ✧

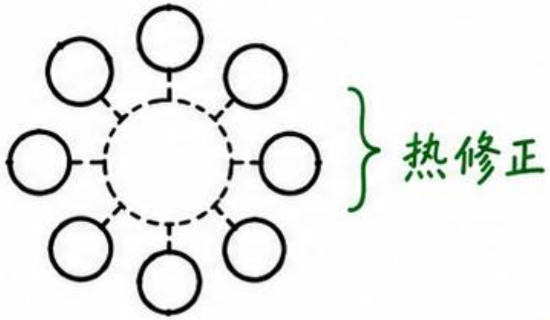




有限温有效势能

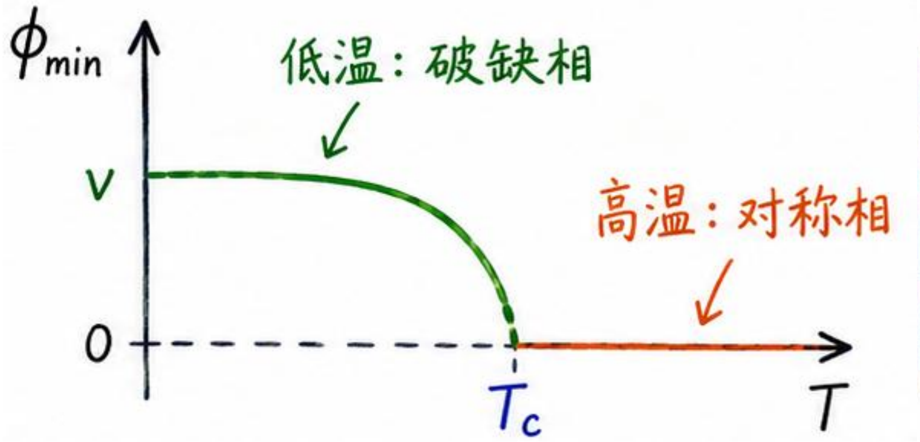
$\beta = \frac{1}{T}$

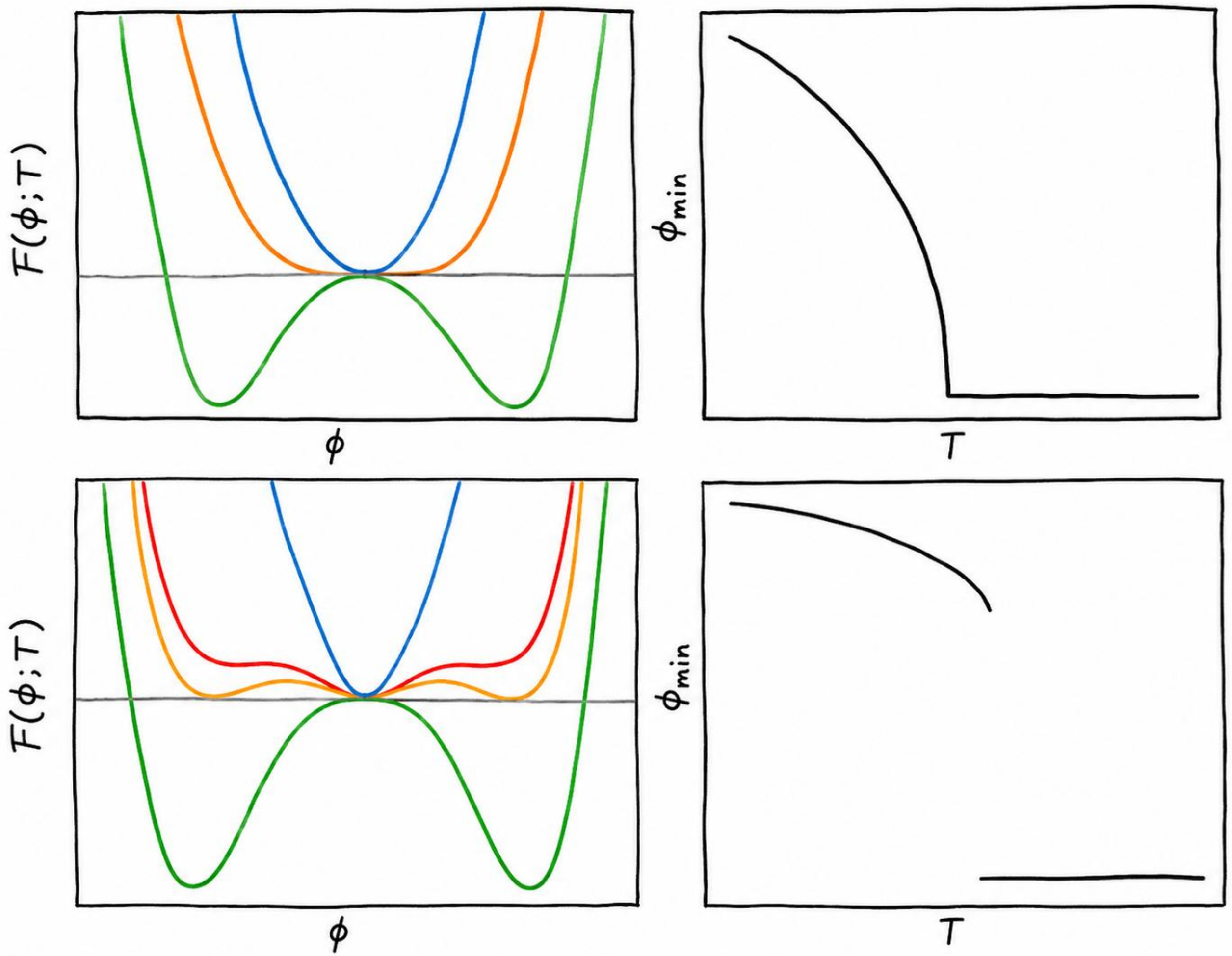
$V_{eff} = V_0 + V_{CW} + V_T + V_{daisy}$



自由能与序参量

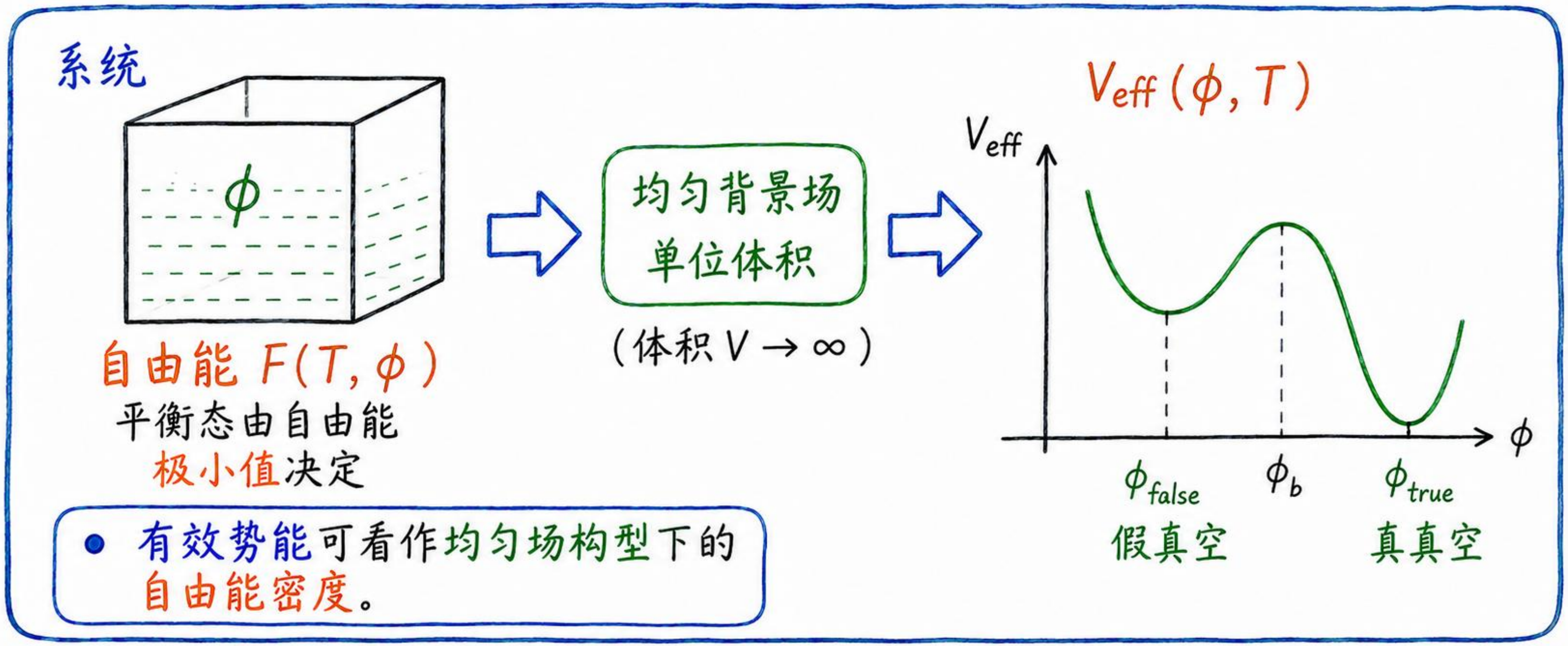
$$\frac{\partial F(\phi;T)}{\partial \phi} = 0, \quad \frac{\partial^2 F(\phi;T)}{\partial \phi^2} > 0.$$





自由能的极小值决定体系平衡态，序参量描述相的变化。

从自由能到有效势能



从热力学自由能出发，可引入有限温有效势能来研究真空结构与相变。

生成泛函、有效作用量、有效势能

自由能与配分函数关系为：

$$F(T,V,N) = -k_B T \ln Z(T,V,N)$$

量子场论中与配分函数等价的描述是生成泛函

$$Z[J] \equiv e^{-iE[J]} \equiv \int \mathcal{D}\phi \, \exp\left\{ i \int d^4x \left(\mathcal{L}[\phi] + J\phi \right) \right\}.$$

E[J] 对外源的泛函导数定义经典场

$$\frac{\delta E[J]}{\delta J(x)} = -\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J \equiv -\phi_{cl}(x)$$

对E[J] 作勒让德变换得到有效作用量

$$\Gamma[\phi_{cl}] = -E[J] - \int d^4y \, J(y)\phi_{cl}(y)$$

有效作用量关于经典场的变分

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(x)}\Gamma[\phi_{cl}] &= -\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(x)}E[J] - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)}\phi_{cl}(y) - J(x) \\
&= -\underbrace{\int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)} \frac{\delta E[J]}{\delta J(y)}}_{\text{带入上面结果}} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_{cl}(x)}\phi_{cl}(y) - J(x) \\
&= -J(x).
\end{aligned}$$

把外部源取为零

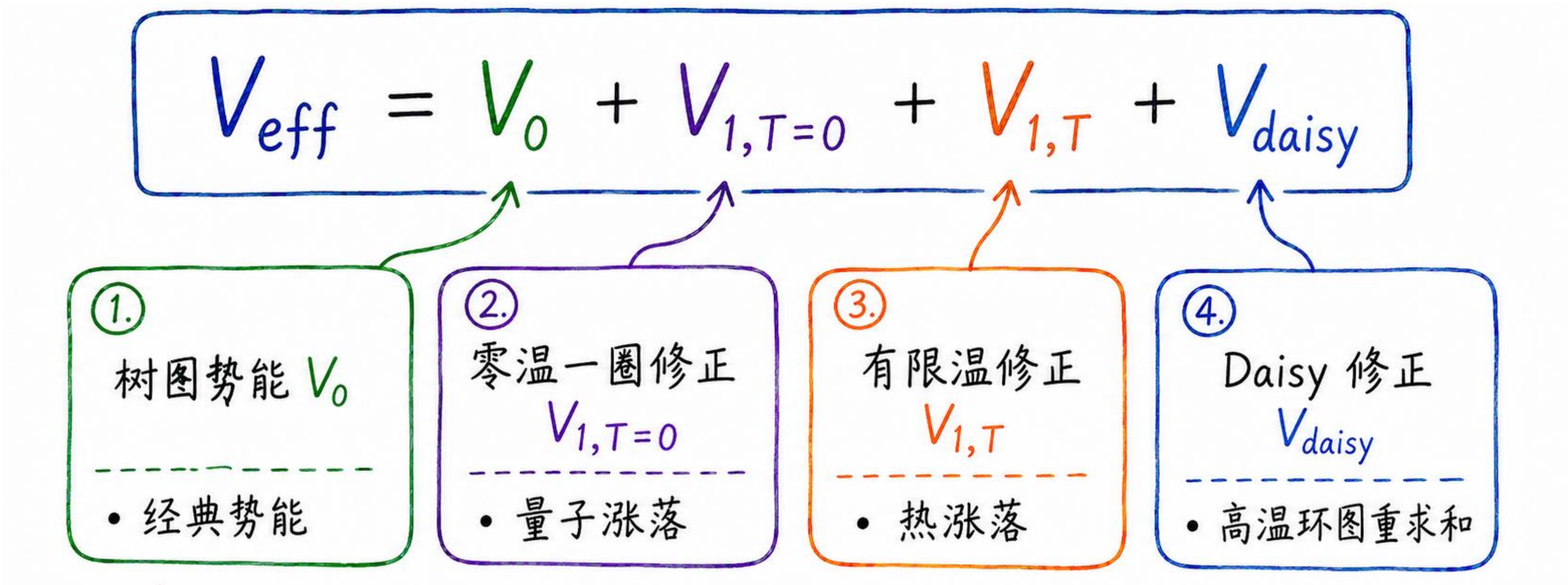
$$\frac{\delta}{\delta\phi_{cl}(x)}\Gamma[\phi_{cl}] = 0$$

$$\Gamma[\phi_{cl}] = -(VT)V_{\text{eff}}(\phi_{cl});$$

在常数场背景下构造出有效势能

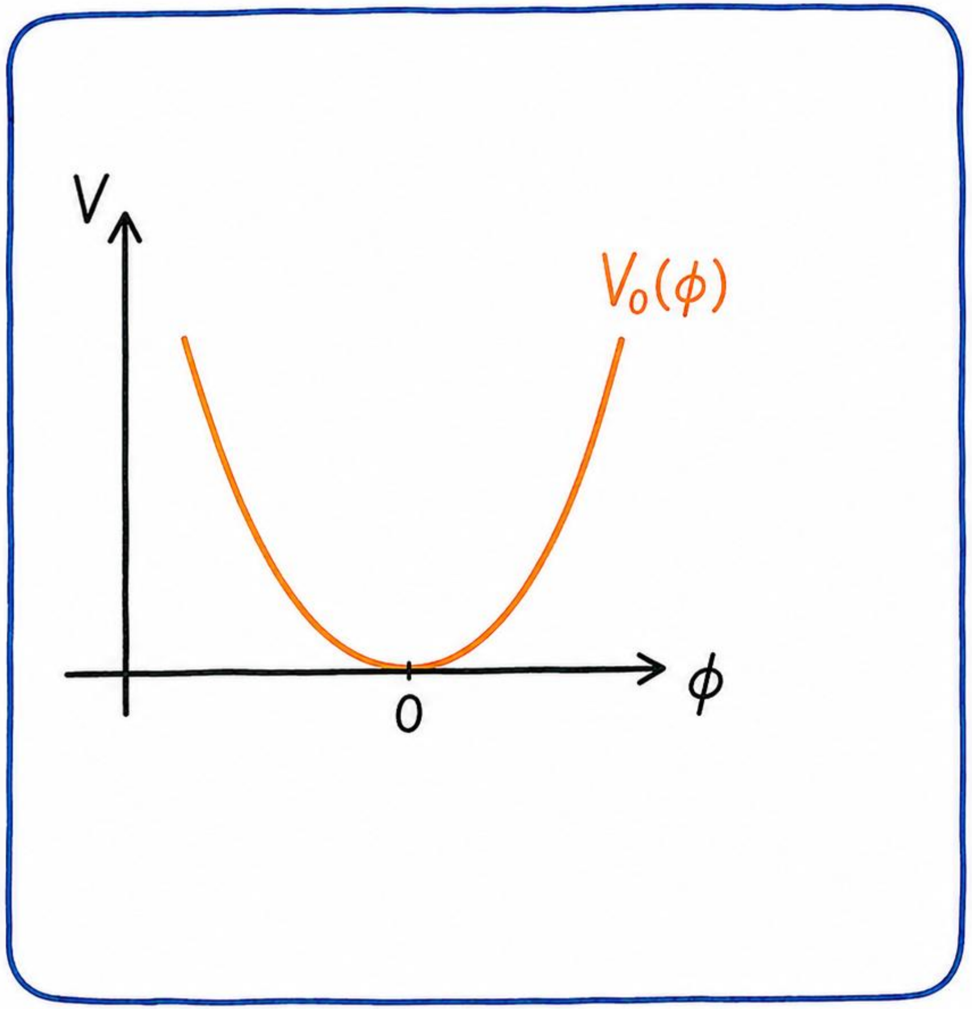
$$\frac{dV_{\text{eff}}(\phi_{cl})}{d\phi_{cl}} = 0$$

有效势能的组成



有限温有效势能同时包含经典、量子与热修正。

树图势能与场依赖质量



单标量场理论的经典树图势能

$$V_0(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4$$

极值条件

$$\left\langle \frac{dV(\phi)}{d\phi} \right\rangle_0 = 0$$

粒子质量

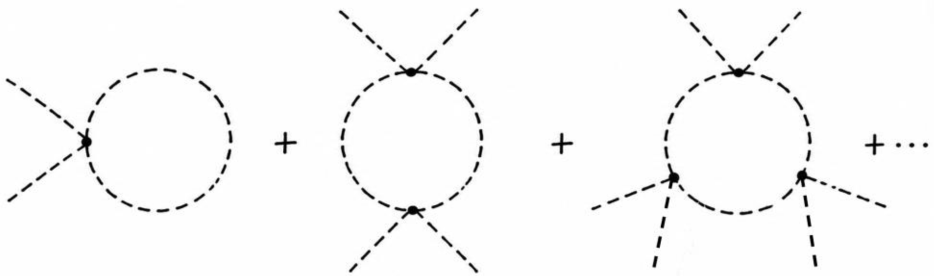
$$m_\phi^2 = \left.\frac{d^2V_0}{d\phi^2}\right|_{\phi=\langle\phi\rangle_0} = m^2 + \frac{\lambda}{2}\langle\phi\rangle_0^2$$

在任意背景场取值下的质量称之为场依赖质量

$$\bar{m}_\phi^2(\phi) = \frac{d^2V_0}{d\phi^2} = m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2$$

零温一圈 Coleman-Weinberg 修正

一圈修正：所有一圈图的求和



一圈修正可通过对所有一圈图求和得到

$$V_{1,T=0}^{\mathrm{scalar}}(\phi) = i\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{2n}\left[\frac{\lambda\phi^2}{2(p^2-m^2+i\varepsilon)}\right]^n$$

$$= -\frac{i}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\log\left[1-\frac{\lambda\phi^2}{2(p^2-m^2+i\varepsilon)}\right]$$

作 Wick 旋转

$$V_{1,T=0}^{\mathrm{scalar}}(\phi) = \underline{\frac{1}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\log\left[p^2+\bar{m}^2(\phi)\right]}$$

积分发散！

使用维数正则化来处理

$$V_{1,T=0}^{\mathrm{scalar}}(\phi) = \frac{1}{2}(\mu^2)^{2-n/2}\int\frac{d^np}{(2\pi)^n}\log\left[p^2+\bar{m}^2(\phi)\right]$$

处理 $\log(p^2+\bar{m}^2)$ 的积分项

$$V_{1,T=0}^{\mathrm{scalar}}(\phi) = -\frac{1}{32\pi^2}\frac{1}{n/2-1}\left(\frac{\bar{m}^2(\phi)}{4\pi\mu^2}\right)^{n/2-2}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\bar{m}^4(\phi)$$

第一项为发散项，通过 $\overline{\mathrm{MS}}$ 方案减除掉，最终得到

$$V_{1,T=0}^{\mathrm{scalar}}(\phi) = \frac{\bar{m}^4(\phi)}{64\pi^2}\left[\log\frac{\bar{m}^2(\phi)}{\mu^2}-\frac{3}{2}\right]$$

零温一圈 Coleman-Weinberg 修正

- 当理论中包含多个标量场时

$$V_{1,\,T=0}^{scalar}(\phi) = \sum_{i\in s} \frac{\bar{m}_i^4(\phi)}{64\pi^2} n_i \left[\log\left(\frac{\bar{m}_i^2(\phi)}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right]$$

- 费米子和矢量玻色子对一圈有效势能的贡献

$$V_{1,\,T=0}^{fermion}(\phi) = -\sum_{i\in f} \frac{\bar{m}_i^4(\phi)}{64\pi^2} n_i \left[\log\left(\frac{\bar{m}_i^2(\phi)}{\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right]$$

- 规范玻色子(矢量玻色子)对一圈有效势能的贡献

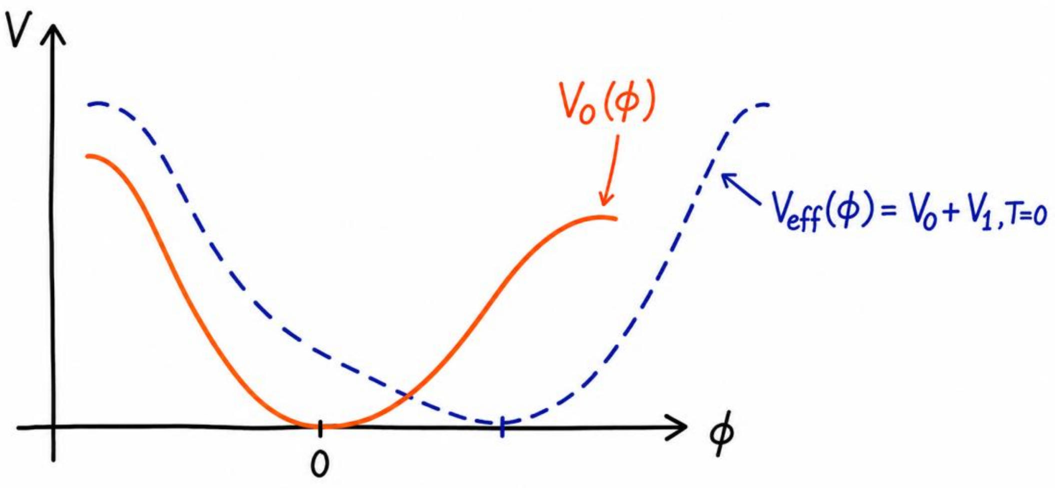
$$V_{1,\,T=0}^{gauge\ boson}(\phi) = \sum_{i\in V} \frac{\bar{m}_i^4(\phi)}{64\pi^2} n_i \left[\log\left(\frac{\bar{m}_i^2(\phi)}{\mu^2}\right) - \frac{5}{6}\right]$$

- 当理论中包含费米子和矢量玻色子自由度时，总的零温一圈修正

$$V_{1,\,T=0}(\phi) = V_{1,\,T=0}^{scalar}(\phi) + V_{1,\,T=0}^{fermion}(\phi) + V_{1,\,T=0}^{gauge\ boson}(\phi)$$

零温一圈有效势(总修正)

$$V_{1,T=0} \sim \sum_i \frac{n_i\, \bar{m}_i^4(\phi)}{64\,\pi^2}\left[\ln\left(\frac{\bar{m}_i^2(\phi)}{\mu^2}\right) - C_i\right]$$

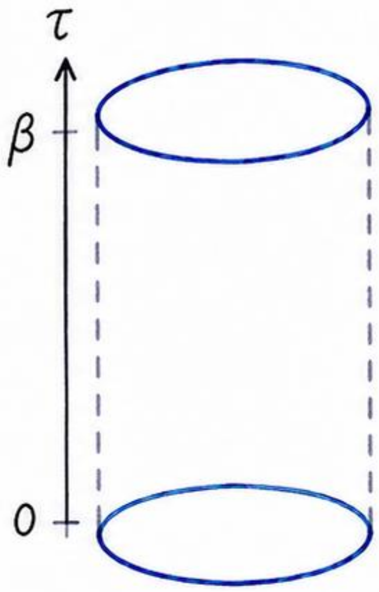


- 量子修正会改变势阱深度、曲率与真空位置。

有限温场论：虚时与 Matsubara 频率

- 虚时 τ：紧致化为周期（或反周期）

$$\tau \in [0, \beta], \quad \beta = 1/T$$



- 玻色子（周期边界条件）

$$\phi(\tau+\beta) = \phi(\tau)$$

Matsubara 频率： $\omega_n^B = 2\pi n T$

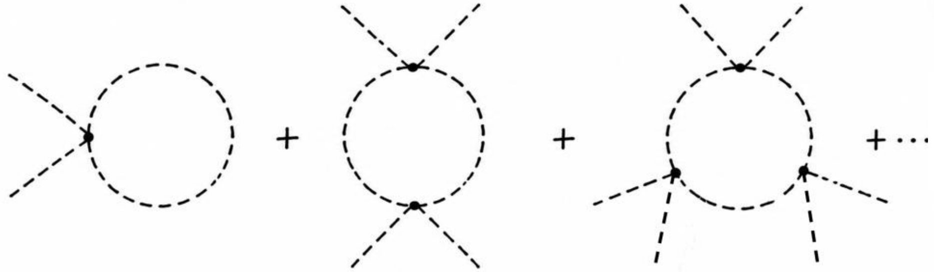
$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

- 费米子（反周期边界条件）

$$\psi(\tau+\beta) = -\psi(\tau)$$

Matsubara 频率： $\omega_n^F = (2n+1)\pi T$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$



有限温度修正

$$V_T^{\text{scalar}}(\phi;T) = \frac{1}{2\beta}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\log\left(\omega_n^2 + \boxed{\omega^2}\right)$$

$\omega^2 = \vec{p}^{\,2} + \bar{m}_s^2(\phi)$ 在大 n 极限下发散，处理后

$$V_T^{\text{scalar}}(\phi;T) = \int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left[\underbrace{\frac{\omega}{2}}_{\text{温度无关项}} + \underbrace{\frac{1}{\beta}\log\left(1-e^{-\beta\omega}\right)}_{\text{温度相关项}}\right]$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\log\left(p^2 + \bar{m}_s^2(\phi)\right)$$ 与先前推导的零温一圈贡献一致！

热函数J_B，J_F 及其物理意义

温度依赖部分的三维动量积分写为球坐标形式

$$\frac{1}{\beta}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\log\left(1-e^{-\beta\omega}\right)=\frac{1}{2\pi^2\beta}\int_0^\infty dp\, p^2\log\left(1-e^{-\beta\sqrt{p^2+\bar{m}_s^2}}\right)$$

无量纲化

$$\frac{1}{2\pi^2\beta^4}\int_0^\infty dx\, x^2\log\left(1-e^{-\sqrt{x^2+\beta^2\bar{m}_s^2}}\right)$$

定义热玻色子函数 J_B

$$J_B(\bar{m}_s^2\beta^2)\equiv\int_0^\infty dx\, x^2\log\left(1-e^{-\sqrt{x^2+\beta^2\bar{m}_s^2}}\right)$$

温度依赖部分可简洁地表示为

$$\frac{1}{\beta}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\log\left(1-e^{-\beta\omega}\right)=\frac{1}{2\pi^2\beta^4}J_B\left[\bar{m}_s^2(\phi_c)\beta^2\right]$$

在高温极限下 J_B 可展开为幂级数，

$$J_B\left(\frac{\bar{m}_s^2}{T^2}\right)=-\frac{\pi^4}{45}+\frac{\pi^2}{12}\frac{\bar{m}_s^2}{T^2}-\frac{\pi}{6}\left(\frac{\bar{m}_s^2}{T^2}\right)^{3/2}-\frac{1}{32}\frac{\bar{m}_s^4}{T^4}\log\left(\frac{\bar{m}_s^2}{a_bT^2}\right)$$
$$-2\pi^{7/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l\zeta(2l+1)}{(l+1)!}\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\bar{m}_s^2}{4\pi^2T^2}\right)^{l+2}$$

标量场对有限温有效势能的贡献

$$\boxed{V_T^{scalar}(\phi;T)=\sum_{i\in s}\frac{T^4}{2\pi^2}n_i\,J_B\left(\frac{\bar{m}_i^2(\phi)}{T^2}\right)}$$

费米子的一圈有限温度有效势能修正

$$\boxed{V_T^{fermion}(\phi;T)=-\sum_{i\in f}\frac{T^4}{2\pi^2}n_i\,J_F\left(\frac{\bar{m}_i^2(\phi)}{T^2}\right)}$$

$$J_F\left(\frac{\bar{m}_f^2}{T^2}\right)=\frac{7\pi^4}{360}-\frac{\pi^2}{24}\frac{\bar{m}_f^2}{T^2}-\frac{1}{32}\frac{\bar{m}_f^4}{T^4}\log\left(\frac{\bar{m}_f^2}{a_fT^2}\right)$$
$$-\frac{\pi^{7/2}}{4}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l\zeta(2l+1)}{(l+1)!}\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(1-2^{-2l-1}\right)\left(\frac{\bar{m}_f^2}{\pi^2T^2}\right)^{l+2}$$

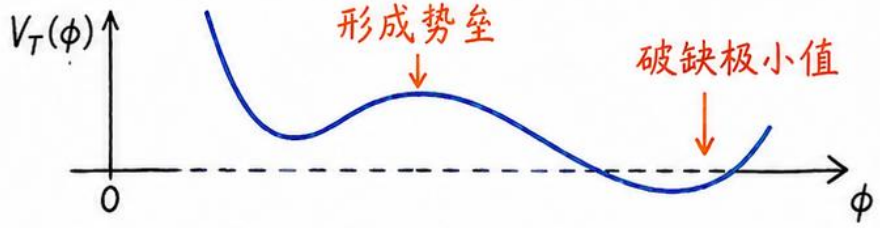
热函数J_B，J_F及其物理意义

$$J_B\left(\frac{\bar{m}_s^2}{T^2}\right) = -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12}\frac{\bar{m}_s^2}{T^2} \boxed{-\frac{\pi}{6}\left(\frac{\bar{m}_s^2}{T^2}\right)^{3/2}} - \frac{1}{32}\frac{\bar{m}_s^4}{T^4}\log\left(\frac{\bar{m}_s^2}{a_b T^2}\right) - 2\pi^{7/2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l\zeta(2l+1)}{(l+1)!}\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\bar{m}_s^2}{4\pi^2T^2}\right)^{l+2}$$

$$J_F\left(\frac{\bar{m}_f^2}{T^2}\right) = \frac{7\pi^4}{360} - \frac{\pi^2}{24}\frac{\bar{m}_f^2}{T^2} - \frac{1}{32}\frac{\bar{m}_f^4}{T^4}\log\left(\frac{\bar{m}_f^2}{a_f T^2}\right) - \frac{\pi^{7/2}}{4}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^l\zeta(2l+1)}{(l+1)!}\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(1-2^{-2l-1}\right)\left(\frac{\bar{m}_f^2}{\pi^2T^2}\right)^{l+2}$$

$$V_T(\phi) = D(T^2-T_0^2)\phi^2 - \underbrace{\boxed{ET\phi^3}}_{\text{立方项}} + \frac{\lambda_T}{4}\phi^4 + \cdots$$

⭐ 玻色子高温展开可产生立方项

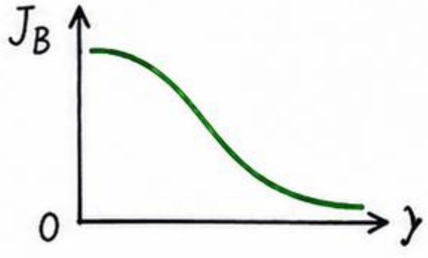


- 热函数（热修正函数）

$$\boxed{J_B(y^2),\ J_F(y^2)}$$

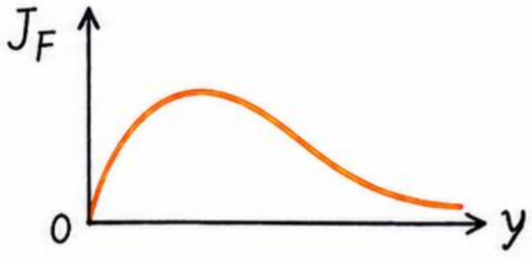
- 描述玻色子/费米子热激发对自由能的贡献
- 变量： $y^2 = \frac{m^2}{T^2}$

玻色子 $J_B(y^2)$



$y \ll 1$ 时较大（IR 增强）

费米子 $J_F(y^2)$



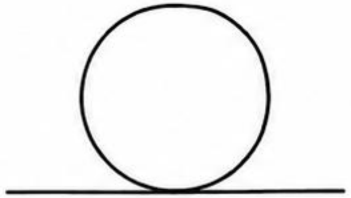
$y \ll 1$ 时受抑制（无零模）

立方项有助于形成一阶相变势垒

Daisy 重求和：为什么高温下红外会出问题

热质量 $\quad \bar{M}^2(\phi;T) \equiv \bar{m}^2(\phi) + \Pi_\phi(\phi;T)$

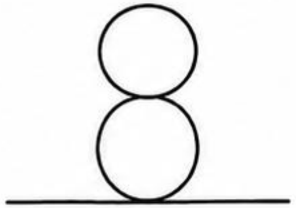
一圈自能修正



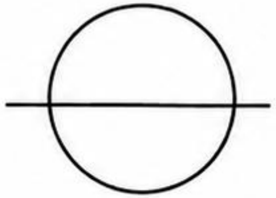
$$= \frac{\lambda}{2} J(\bar{m}^2) = \frac{\lambda}{2} T \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + p^2 + \bar{m}^2}$$

$$= \frac{\lambda}{2}\left[\frac{T^2}{12} - \frac{T\bar{m}}{4\pi} + \cdots\right].$$

两圈自能修正

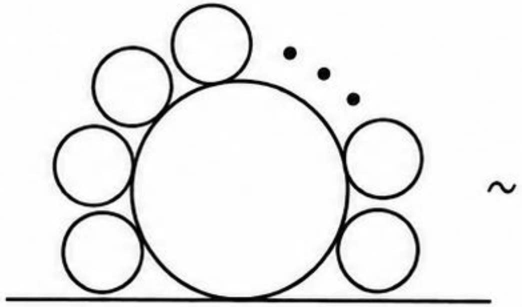


$\sim \lambda T^2 \left(\frac{\lambda T}{\bar{m}}\right)$



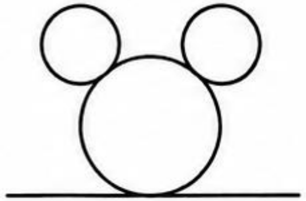
$\sim \lambda^2 T^2 \ln\left(\frac{\bar{m}}{T}\right)$

$\longrightarrow$ Daisy图

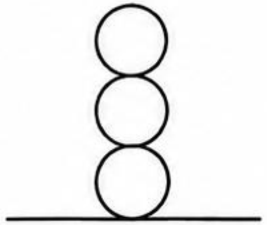


$$\sim \frac{\lambda^2 T^3}{\bar{m}} \left(\frac{\lambda T^2}{\bar{m}^2}\right)^{n-2}$$

三圈自能修正



$\sim (\lambda T^2)^2 \left(\frac{\lambda T}{\bar{m}^3}\right)$



$\sim \lambda T^2 \left(\frac{\lambda T}{\bar{m}}\right)^2$

Daisy 重求和：为什么高温下红外会出问题

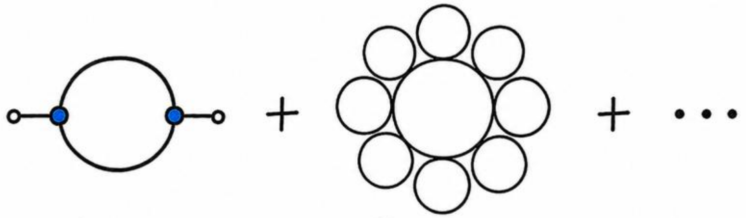
将高温下所有自能图相加，总贡献可写为

$$-i\,\Pi(\phi;T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i\lambda/2)^n\,(T^2/12)^{n-1}\,(i\partial_{\bar{m}^2})^{n-1}\,J(\bar{m}^2)}{(n-1)!}$$

$$= (-i\lambda/2)\,J\left(\bar{m}^2 + \frac{\lambda T^2}{24}\right)$$

- Daisy 重求和（环图重求和）

$$\boxed{m^2(\phi) \longrightarrow m^2(\phi) + \Pi(T)}$$



在考虑所有阶自能修正后，总的贡献变为一个有限值

质量修正为

$$\bar{M}^2 = \bar{m}^2 + \frac{\lambda}{2}\,J\left(\bar{m}^2 + \frac{\lambda T^2}{24}\right)$$

Parwani vs Arnold-Espinosa

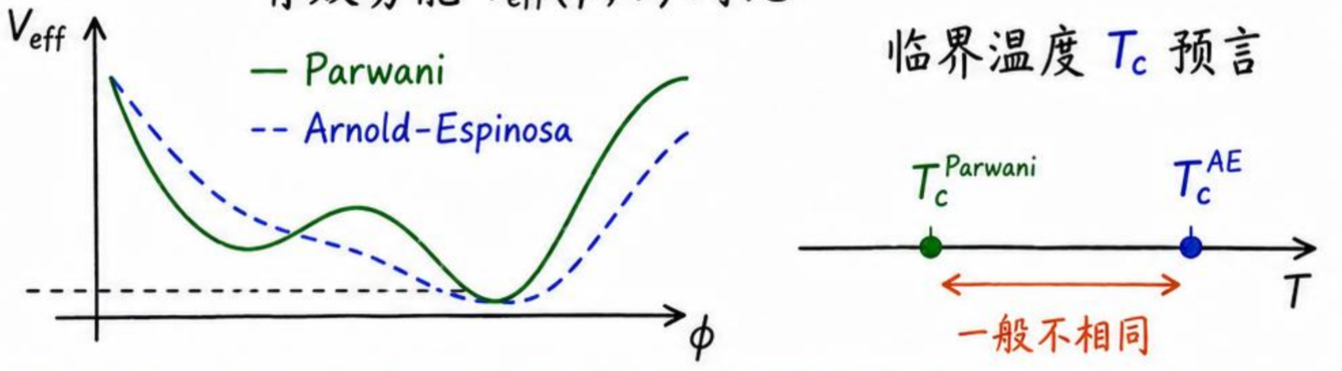
Parwani

- 在热函数与立方项中都使用热质量 $m^2+\Pi(T)$

Arnold-Espinosa

- 只在 Daisy 立方项部分引入热质量

有效势能 $V_{eff}(\phi,T)$ 对比



⭐ 两种处理反映不同的微扰重组方式，数值结果可能不同。

方案差异体现了有限温有效势能计算中的理论不确定性。

标准模型有限温有效势能

$$V_0(H) = -\mu_H^2 H^\dagger H + \lambda_H (H^\dagger H)^2 \qquad H = \begin{pmatrix} G^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + h + iG^0) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{V_{eff} = V_0 + V_{CW} + V_T}$$

$$V_0(\phi) = -\frac{\mu_H^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_H}{4}\phi^4$$

$$V_{1,T=0}(\phi) = \sum_i (-1)^{2s_i} \frac{\overline{m}_i^4(\phi)}{64\pi^2} n_i \left(\ln \frac{\overline{m}_i^2(\phi)}{\mu^2} - c_i \right)$$

$$V_T(\phi;T) = -\sum_i \frac{T^4}{2\pi^2} n_i J\left(\frac{\overline{m}_i^2(\phi)}{T^2} \right)$$

典型贡献粒子（标准模型）

H	$G^\pm, G^0$	$W^\pm$	Z	t
Higgs	Goldstone	W	Z	top

标准模型有限温有效势能

$$\bar{m}_h^2(\phi) = -\mu_H^2 + 3\lambda_H \phi^2,$$

$$\bar{m}_{G^0}^2(\phi) = \bar{m}_{G^\pm}^2 = -\mu_H^2 + \lambda_H \phi^2$$

$$\bar{m}_W^2(\phi) = \frac{g^2}{4}\phi^2,$$

$$\bar{m}_Z^2(\phi) = \frac{g^2 + g'^2}{4}\phi^2,$$

$$\bar{m}_t^2(\phi) = \frac{y_t^2}{2}\phi^2,$$

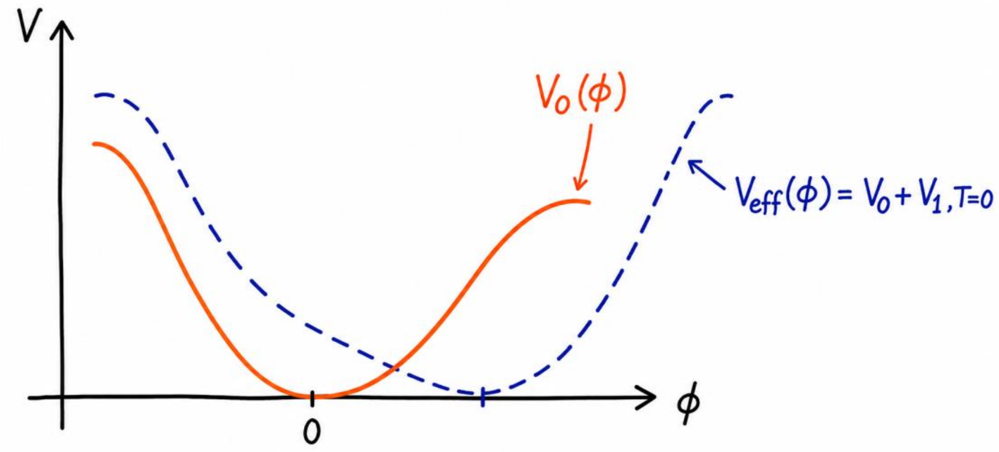
$\xrightarrow{\text{代入}}$

$$n_h = n_{G^0} = 1, \quad n_{G^\pm} = 2, \quad n_W = 6, \quad n_Z = 3, \quad n_t = 12.$$

$$V_{1,T=0}(\phi) = \sum_i (-1)^{2s_i} \frac{\bar{m}_i^4(\phi)}{64\pi^2} n_i \left(\ln \frac{\bar{m}_i^2(\phi)}{\mu^2} - c_i \right)$$

$$V_T(\phi; T) = -\sum_i \frac{T^4}{2\pi^2} n_i \, J\left(\frac{\bar{m}_i^2(\phi)}{T^2} \right)$$

$\overline{\text{MS}}$与OS-like重整化方案



$\overline{\text{MS}}$

- 参数随重整化尺度运行
- 形式简洁，便于环路计算

OS-like

- 尽量用物理质量与真空期望值输入
- 更贴近物理直观

- 截断到有限阶后，不同方案会带来数值差异。

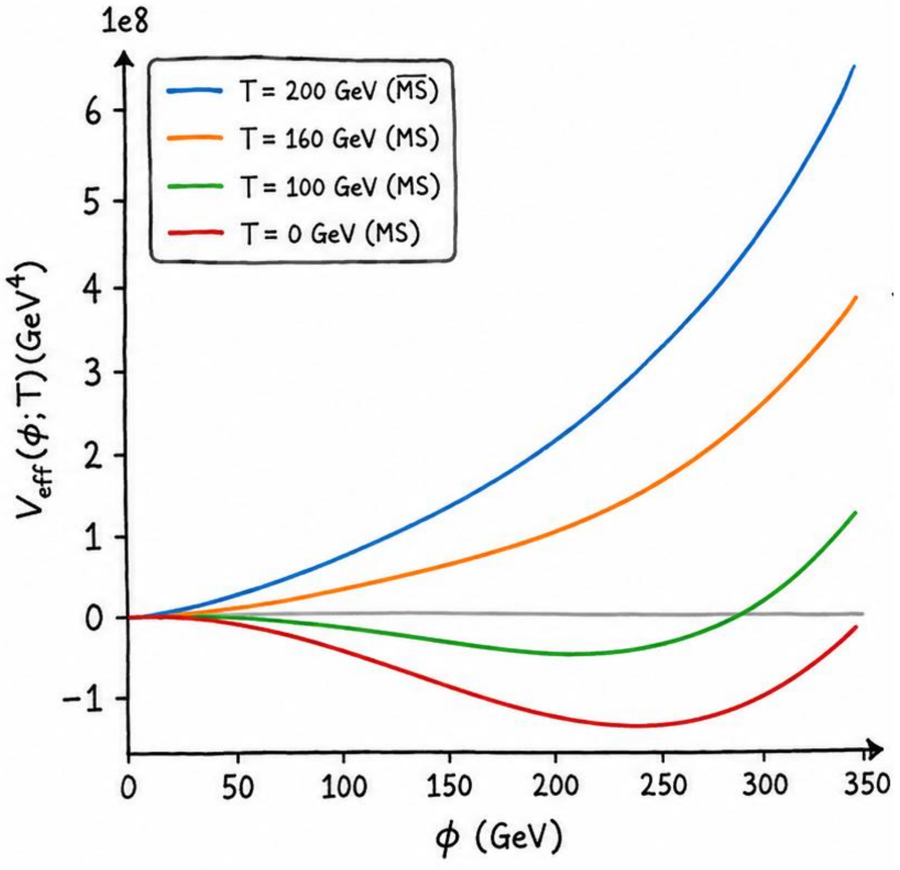
$$\left\langle \frac{\partial (V_0 + V_{1,T=0})}{\partial \phi} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial^2 (V_0 + V_{1,T=0})}{\partial \phi^2} \right\rangle = m_h^2.$$

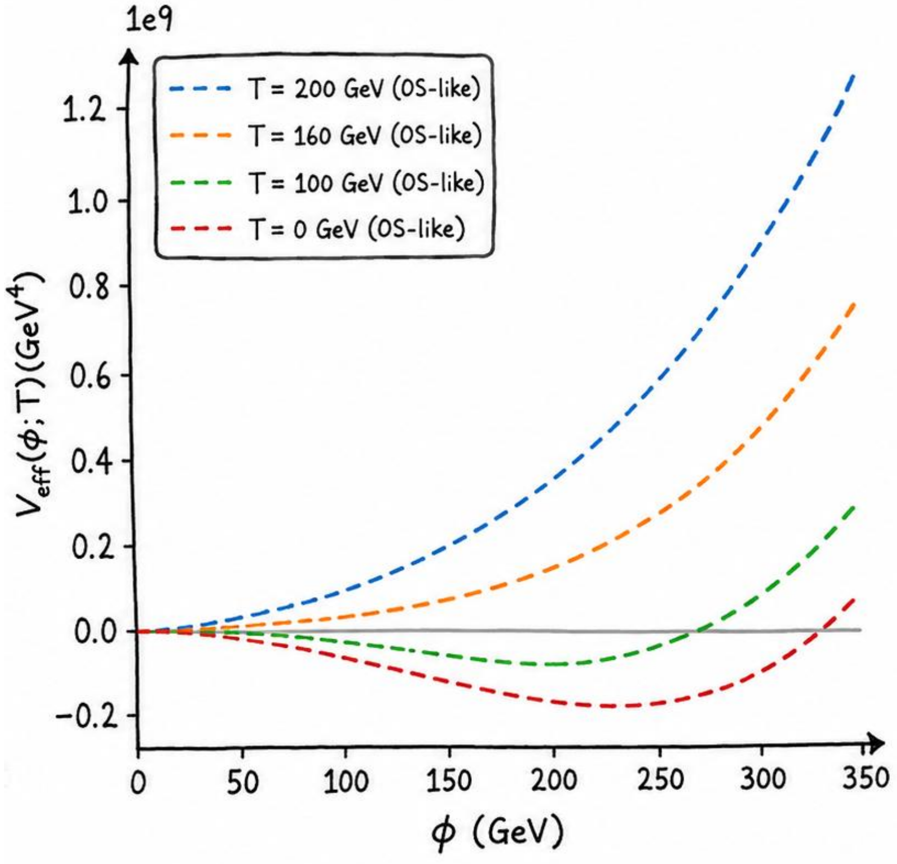
$$V_{\text{eff}}^{\overline{MS}}(\phi; T) = V_0(\phi) + V_{1,T=0}(\phi) + V_{1,T}(\phi; T)$$

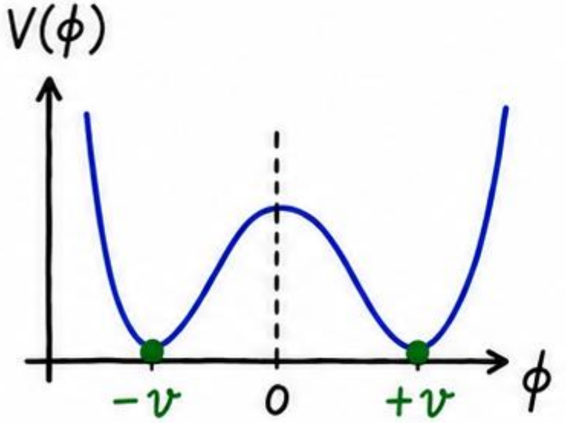
$$V_{\text{eff}}^{OS}(\phi; T) = V_0(\phi) + V_{1,T=0}(\phi) + \boxed{V_{CT}(\phi)} + V_{1,T}(\phi; T)$$

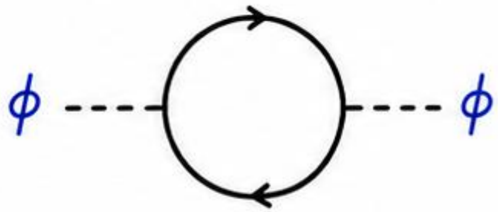
$$\left\langle \frac{\partial (V_{1,T=0} + V_{CT})}{\partial \phi} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial^2 (V_{1,T=0} + V_{CT})}{\partial \phi^2} \right\rangle = 0.$$

$\overline{\text{MS}}$与OS-like重整化方案





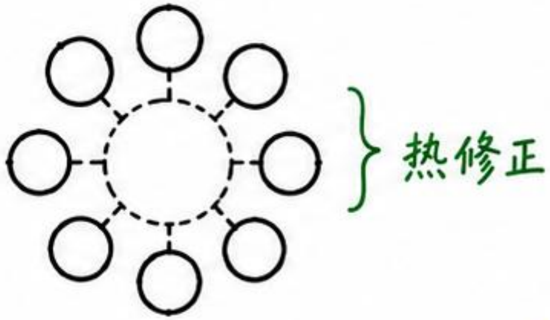




临界温度与相变强度

$$\beta = \frac{1}{T}$$

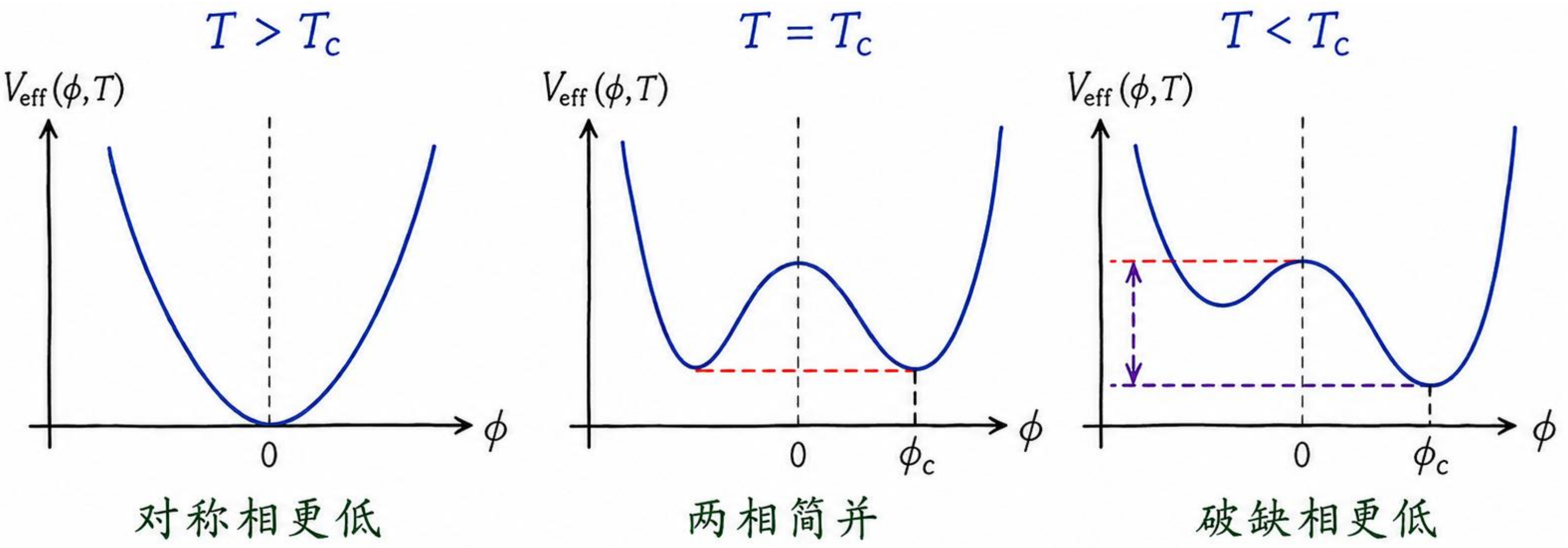
$$V_{eff} = V_0 + V_{CW} + V_T + V_{daisy}$$



临界温度定义

$$\boxed{V_{\mathrm{eff}}(0, T_c) = V_{\mathrm{eff}}(\phi_c, T_c)}$$

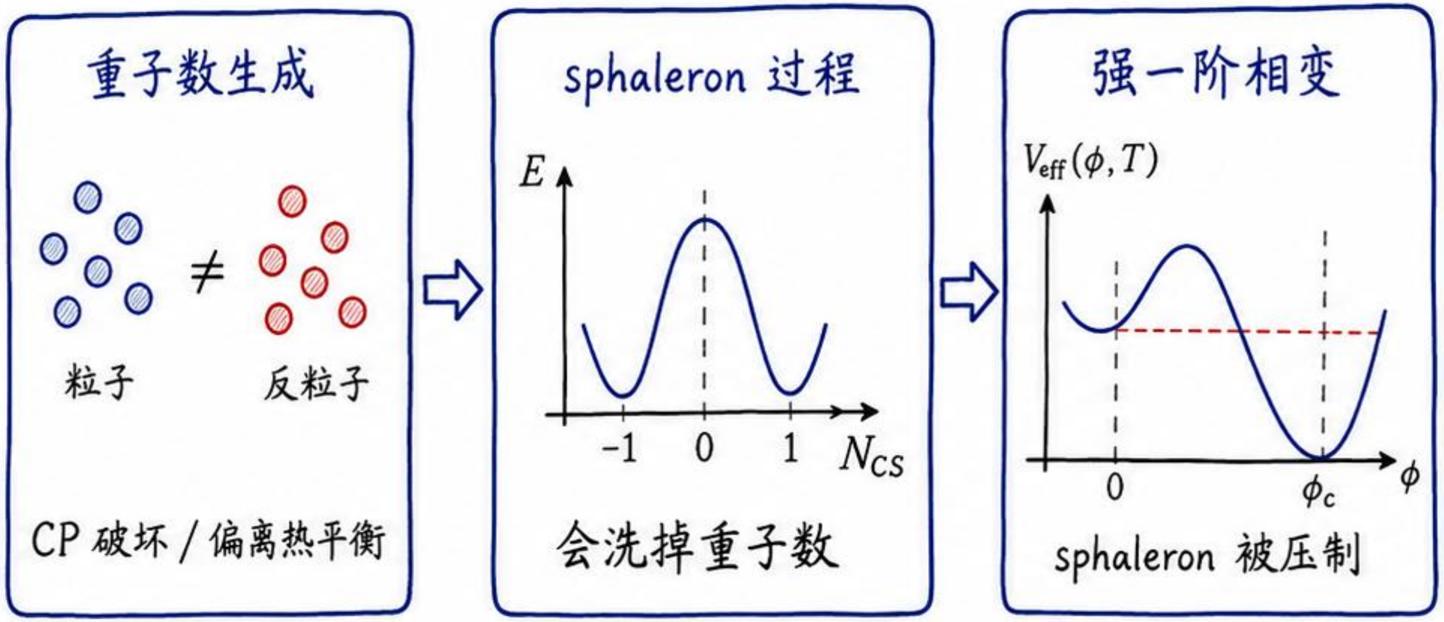
$$\left.\frac{\partial V_{\mathrm{eff}}(\phi; T_c)}{\partial \phi}\right|_{\phi=0} = \left.\frac{\partial V_{\mathrm{eff}}(\phi; T_c)}{\partial \phi}\right|_{\phi=\phi_c}$$



临界温度是两个相自由能相等的温度。

相变强度

$$\Gamma_{\rm sph}^{\rm broken} \ll H$$



强一阶相变的判据： $\dfrac{\phi_c}{T_c} \gtrsim 1$

① 单位体积单位时间的sphaleron 跃迁率

$$\frac{\Gamma_{\rm sph}(T)}{V} \propto T^4 \exp\left[-\frac{E_{\rm sph}(T)}{T}\right]$$

② 为避免被冲刷掉

$$\Gamma_{\rm sph}(T) \lesssim T^2/M_{\rm pl}$$

③ 对 sphaleron 能量的约束条件

$$\frac{E_{\rm sph}(T)}{T} \gtrsim 45$$

④ 根据 $E_{\rm sph}(T) \simeq E_{\rm sph}\dfrac{\phi(T)}{v}$，一阶相变判据为

$$\frac{\phi(T)}{T} \gtrsim 1$$

高温近似下的SM势能

$$V_{\rm eff}^{HT}(\phi;T) = V_0(\phi) + V_{1,T}(\phi;T)$$

当 $\bar{m}/T \ll 1$ 时，热函数 J_B 和 J_F 可近似取前几项，

$$J_B\left(\frac{\bar{m}_s^2}{T^2}\right) = -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2}{12}\frac{\bar{m}_s^2}{T^2} - \frac{\pi}{6}\left(\frac{\bar{m}_s^2}{T^2}\right)^{3/2}$$

$$J_F\left(\frac{\bar{m}_f^2}{T^2}\right) = \frac{7\pi^4}{360} - \frac{\pi^2}{24}\frac{\bar{m}_f^2}{T^2}.$$

有效势能为

$$V_{\rm eff}^{HT}(\phi;T) = D(T^2 - T_0^2)\phi^2 - ET\phi^3 + \frac{\lambda_h}{4}\phi^4$$

$$T_0^2 = \frac{m_h^2}{4D},$$

$$D = \frac{1}{8v^2}(2m_W^2 + m_Z^2 + 2m_t^2)$$

$$E = \frac{1}{4\pi v^3}(2m_W^3 + m_Z^3).$$

根据临界温度定义

$$T_c = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{E^2}{\lambda_h D}}}, \qquad \phi_c = \frac{2ET_c}{\lambda_h}$$

代入标准模型的参数并直接计算

$$T_0 \simeq 152.76\ \text{GeV}, \qquad D \simeq 0.17, \qquad E \simeq 9.6\times 10^{-3},$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{T_c \simeq 153.09\ \text{GeV}, \qquad \phi_c \simeq 24.3\ \text{GeV}}$$

$$\gamma = \frac{\phi_c}{T_c} \simeq \underline{0.15}$$

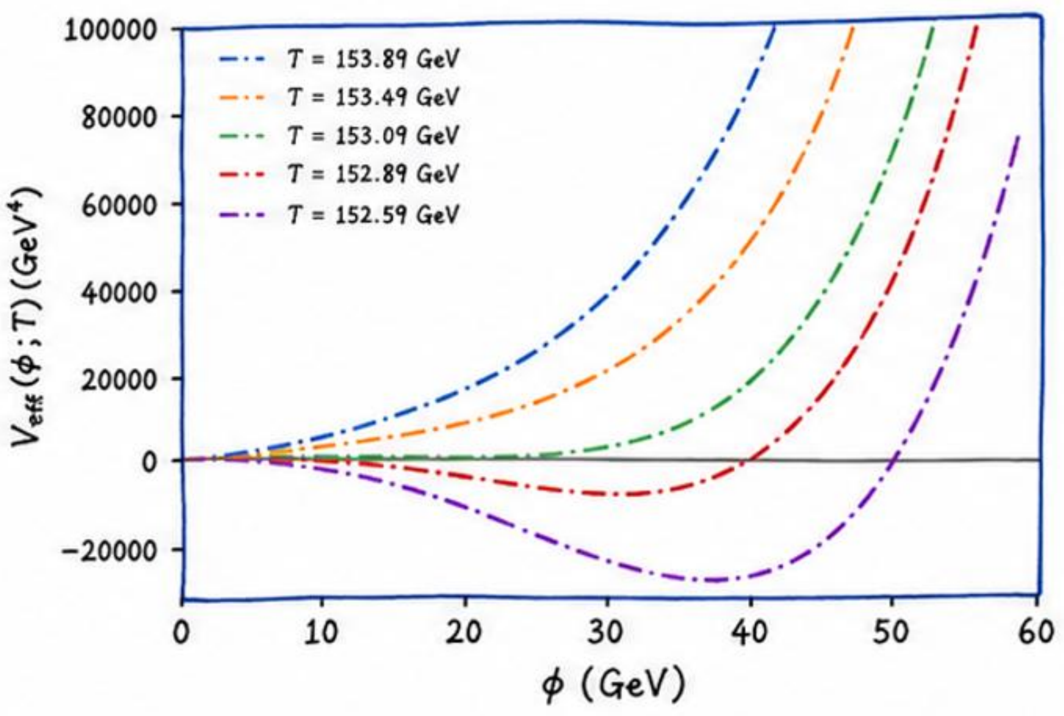
若我们将希格斯玻色子的质量视为自由参数，
要满足强一阶电弱相变条件

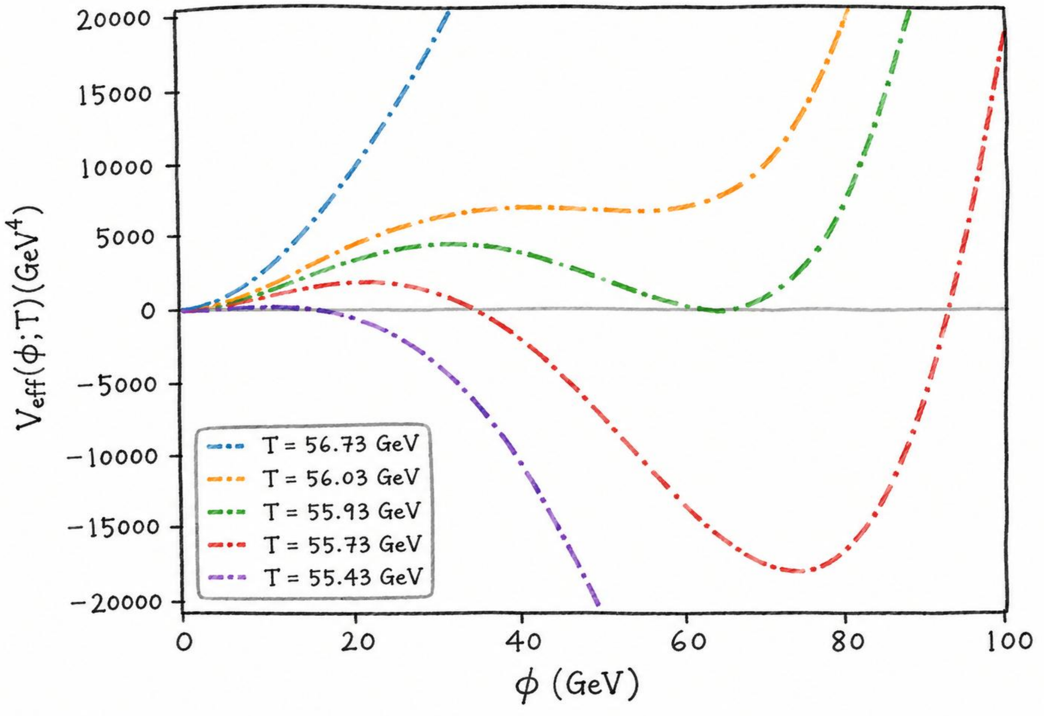
$$m_h \lesssim 48\ \text{GeV}$$

高温近似下的SM势能

有效势能为

$$V_{\text{eff}}^{\text{HT}}(\phi;T) = D\left(T^2 - T_0^2\right)\phi^2 - ET\phi^3 + \frac{\lambda_h}{4}\phi^4$$





新物理如何增强一阶相变：树图势垒、立方项、高维算符、Coleman-Weinberg竞争项

ⓐ 树图阶势触发的一级相变

$$V_{eff}(\phi,T) \approx \frac{1}{2}\left(\mu^2+cT^2\right)\phi^2-\mathcal{E}\phi^3+\frac{\lambda}{4}\phi^4$$

ⓑ 势能的有限温度修正触发的一级相变

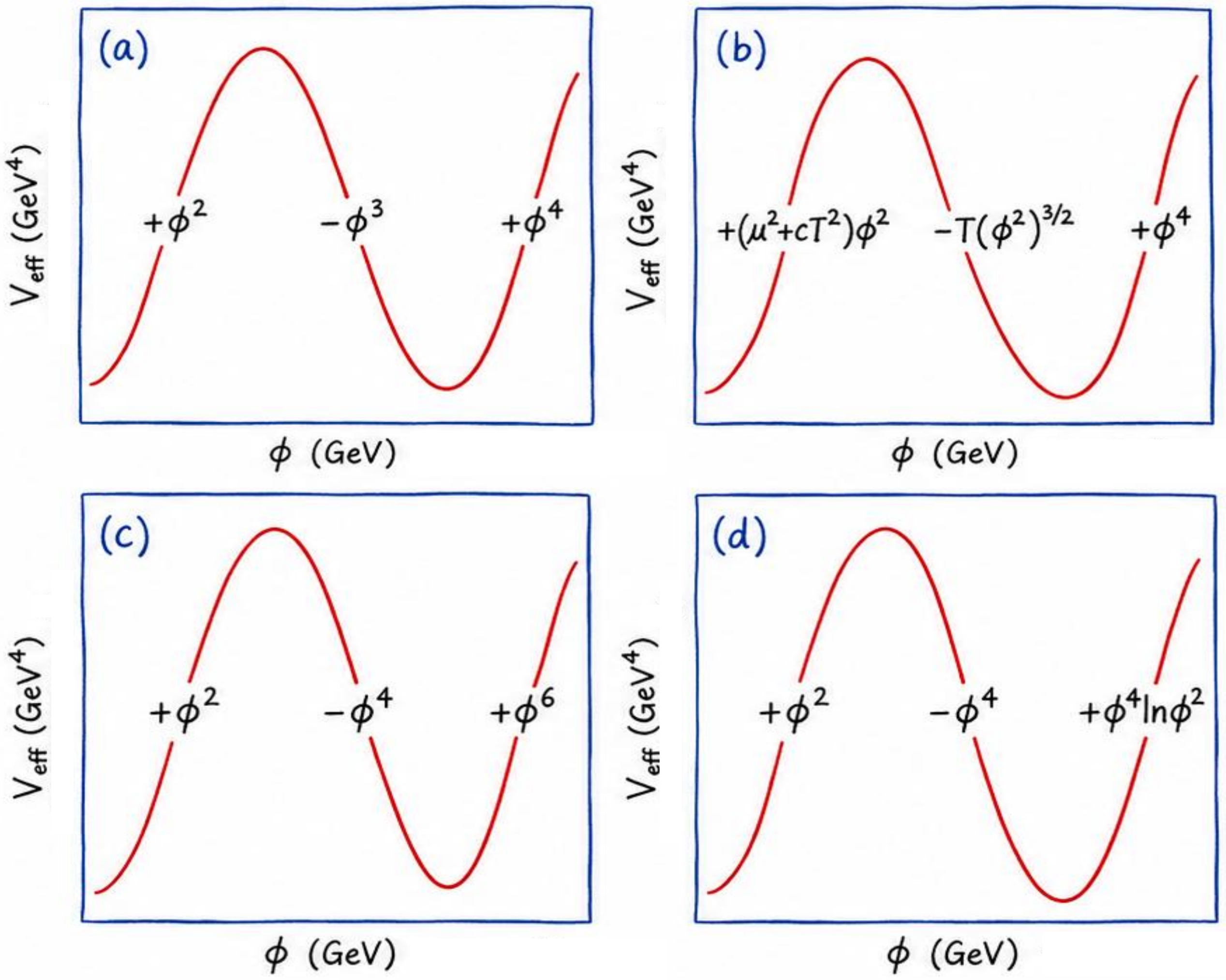
$$V_{eff}(\phi,T) \approx D\left(T^2-T_0^2\right)\phi^2-ET\phi^3+\frac{\lambda}{4}\phi^4$$

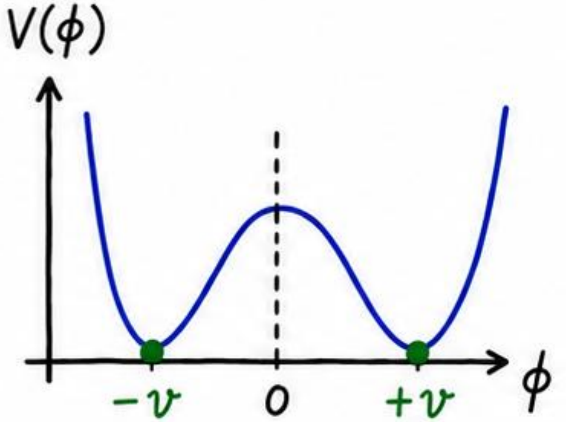
ⓒ 场六维算符触发的一级相变

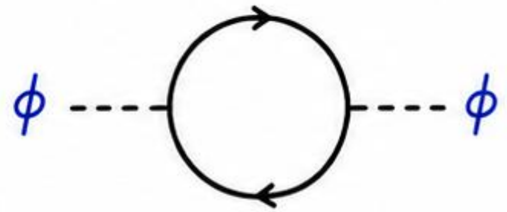
$$V_{eff}(\phi,T) \approx \frac{1}{2}\left(\mu^2+cT^2\right)\phi^2-\frac{\lambda}{4}\phi^4+\frac{1}{8\Lambda^2}\phi^6$$

ⓓ 势能的零温一圈修正触发的一级相变

$$V_{eff}(\phi,T) \approx \frac{1}{2}\left(\mu^2+cT^2\right)\phi^2-\frac{\lambda}{4}\phi^4+\frac{\kappa}{4}\phi^4\ln\frac{\phi^2}{M^2}$$



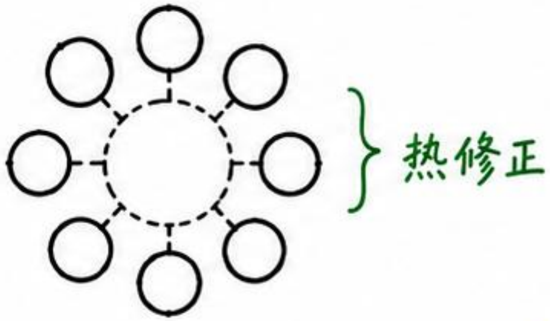




成核温度与反弹解

$$\beta = \frac{1}{T}$$

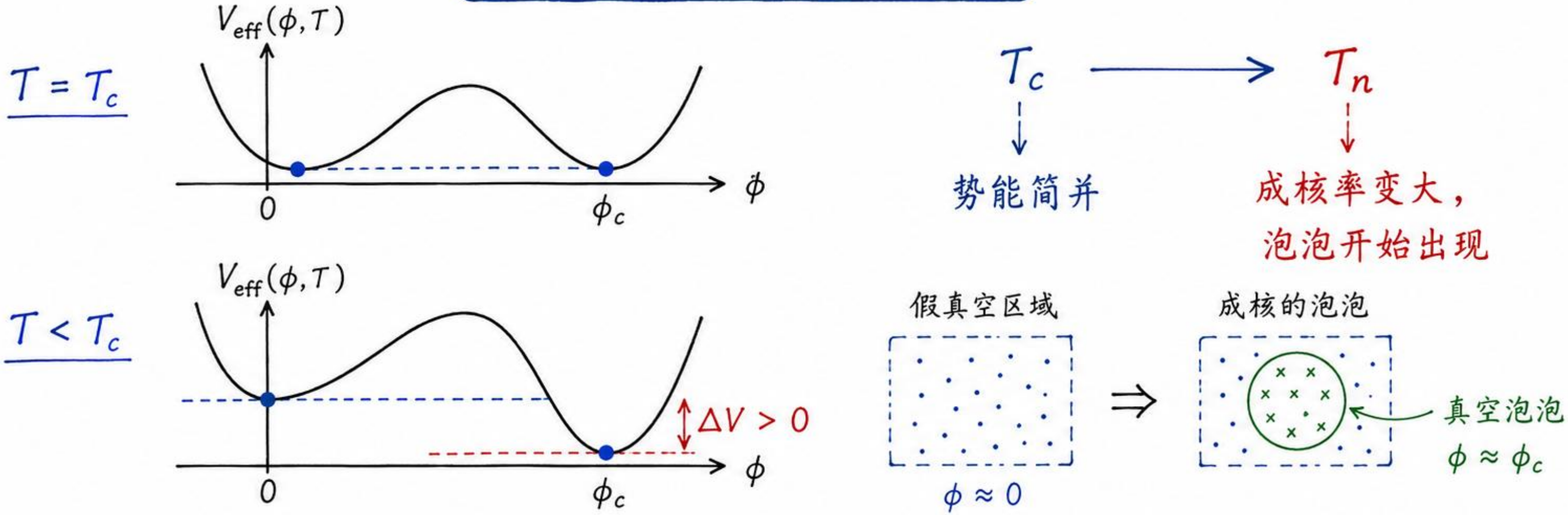
$$V_{eff} = V_0 + V_{CW} + V_T + V_{daisy}$$



为什么T_C不等于相变真正发生温度

T_c：两相自由能相等

$$V_{eff}(0,T_c) = V_{eff}(\phi_c,T_c)$$

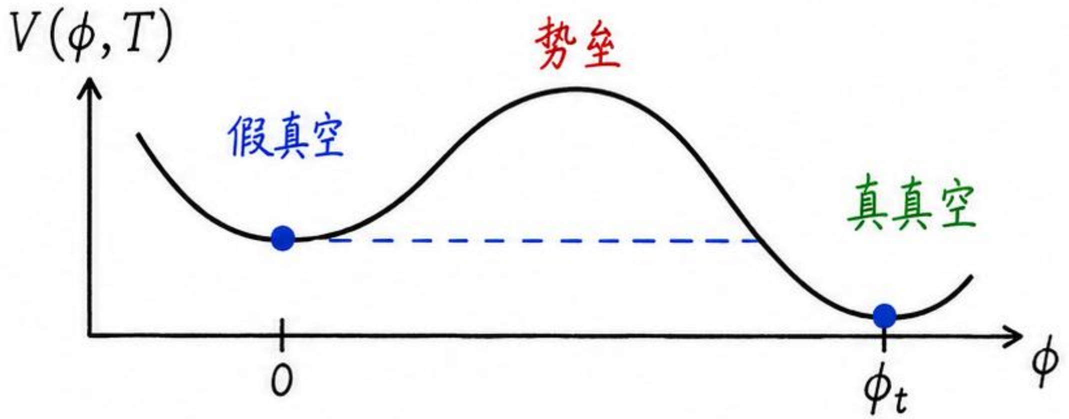


虽然在 T_c 两相已经简并，但体系仍需克服势垒。真正相变发生在成核率足够大时，因此 $T_n < T_c$。

真空衰变与成核率

单位时间、单位体积的成核概率

$$\Gamma \propto \begin{cases} \boxed{\exp(-S), \qquad T = 0,} \\ \exp\left[-\dfrac{R_{min}(r)}{T}\right], \quad T \neq 0, \end{cases}$$



零温情形下，考虑标量场作用量

$$S_M = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - V(\phi)\right] \xrightarrow{\text{对时间坐标作Wick旋转}} S_E = \int d^3x\, d\tau \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi)\right]$$

在半经典近似下，泡泡成核的主要贡献由由使 S_E 取极值的泡泡构型主导

$$\ddot{\phi}(\tau) - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

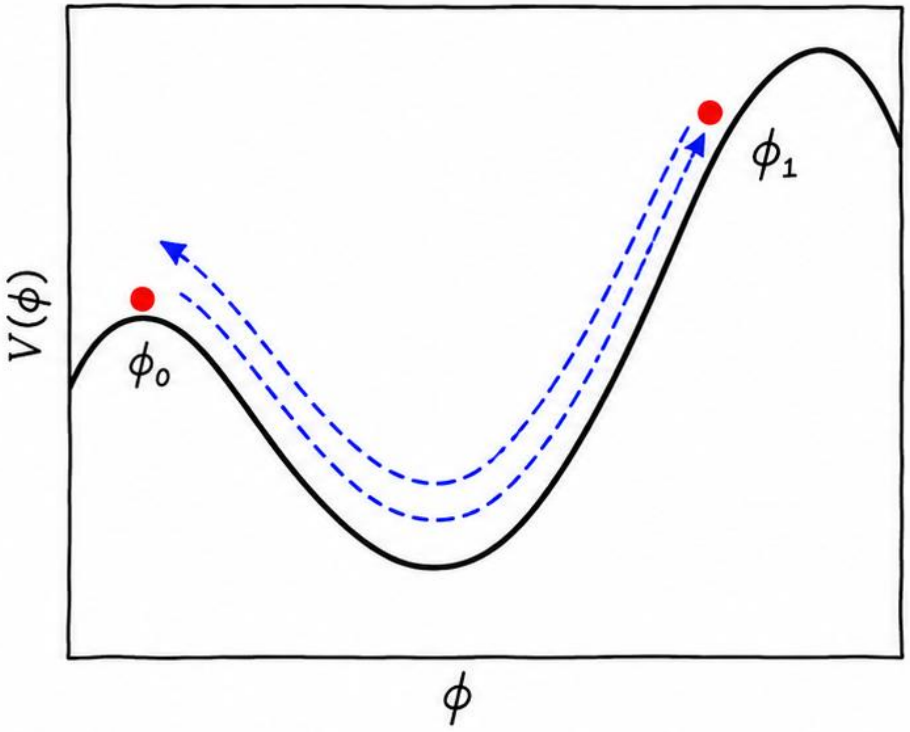
真空衰变与成核率

$$\ddot{\phi}(\tau) - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \xrightarrow{\text{一维“经典粒子”在倒置势能 } -V(\phi) \text{ 中的运动方程}} m\ddot{x} = -\frac{dU}{dx}$$

$\phi(\tau) \Leftrightarrow x(t)$

$\tau \Leftrightarrow t$

$V_{\mathrm{eff}} \Leftrightarrow -U$



求 ϕ 的构型可类比为求解 $x(t)$ 的运动轨迹

- 当 $\tau \to -\infty$ 时，粒子从左侧位置 $\phi = \phi_0$ 附近受微小扰动出发
- 在 $\tau = 0$ 时到达转折点 $\phi = \phi_1$ 且速度为零
- 随后折返，并在 $\tau \to +\infty$ 时返回 $\phi = \phi_0$

满足上述条件的特解称为反弹解，记为 $\phi_B(\tau)$。将反弹解代入欧式作用量，可以得到成核概率

$$\Gamma = A e^{-S_B}.$$

零温O(4)反弹解

在给定势能函数足够光滑时，Coleman 证明了使欧几里得作用量最小的反弹解一般满足O(4)对称性

$$\ddot{\phi}(\tau) - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \xrightarrow[\rho = \sqrt{|x|^2 + \tau^2}.]{\text{标量场仅依赖于径向坐标}} \frac{d^2\phi}{d\rho^2} + \frac{3}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho} - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0.$$

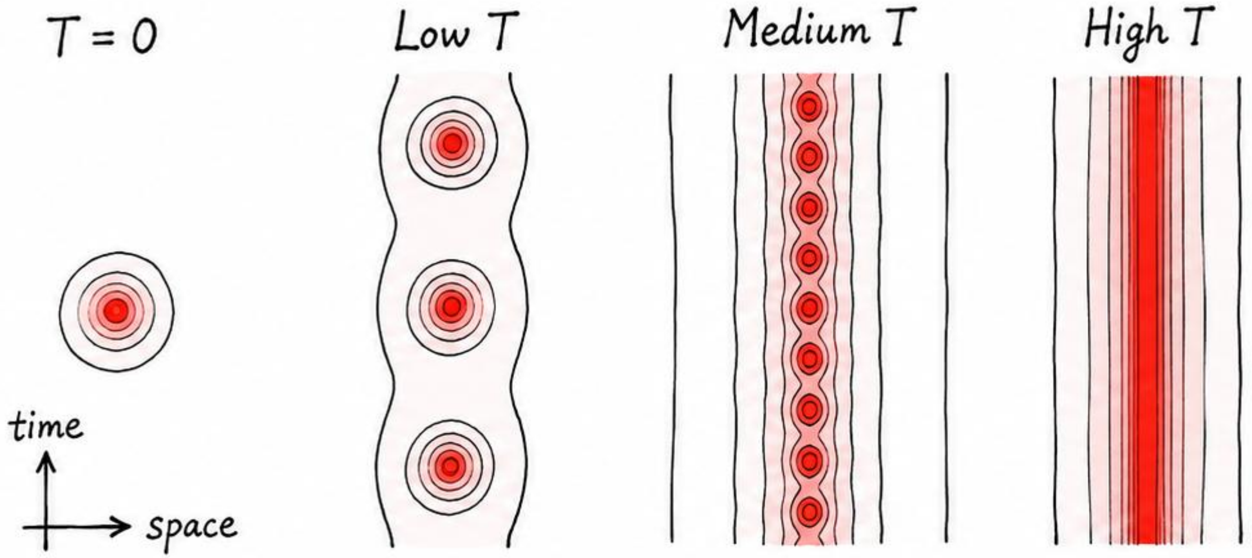
边界条件

$$\boxed{\phi(\rho \to \infty) \to 0, \quad \left.\frac{d\phi}{d\rho}\right|_{\rho=0} = 0.} \longrightarrow \text{O(4) 对称反弹解 } \phi_B$$

四维欧几里得作用量 S_4

$$S_4 = 2\pi^2 \int_0^\infty d\rho\, \rho^3 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi_B}{d\rho}\right)^2 + V(\phi_B)\right]$$

有限温O(3)反弹解



场构型满足周期性条件

$$\phi(\tau+\beta,\mathbf{x})=\phi(\tau,\mathbf{x})$$

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2}+\frac{3}{\rho}\frac{d\phi}{d\rho}-\frac{\partial V}{\partial\phi}=0. \xrightarrow{\text{反弹方程从 O(4) 降为三维O(3)}} \frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\phi}{dr}-\frac{\partial V}{\partial\phi}=0.$$

边界条件

$$\boxed{\phi(r\to\infty)\to 0,\quad \left.\frac{d\phi}{dr}\right|_{r=0}=0} \longrightarrow S_3=4\pi\int_0^\infty\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\phi_b}{dr}\right)^2+V(\phi_b,T)\right]r^2\,dr.$$

成核条件

成核概率 $\Gamma = \boxed{A} e^{-S_B}$ $\quad A \sim O(T^4)$

成核温度 T_n 定义为当宇宙冷却到该温度时，在一个哈勃体积内所成核的临界泡泡平均数达到$O(1)$

$$N(T_n) = \int_{T_n}^{T_c} \frac{dT}{T} \frac{\Gamma(T)}{H(T)^4} = O(1)$$

$$\frac{\Gamma(T_n)}{H(T_n)^4} \sim O(1)$$

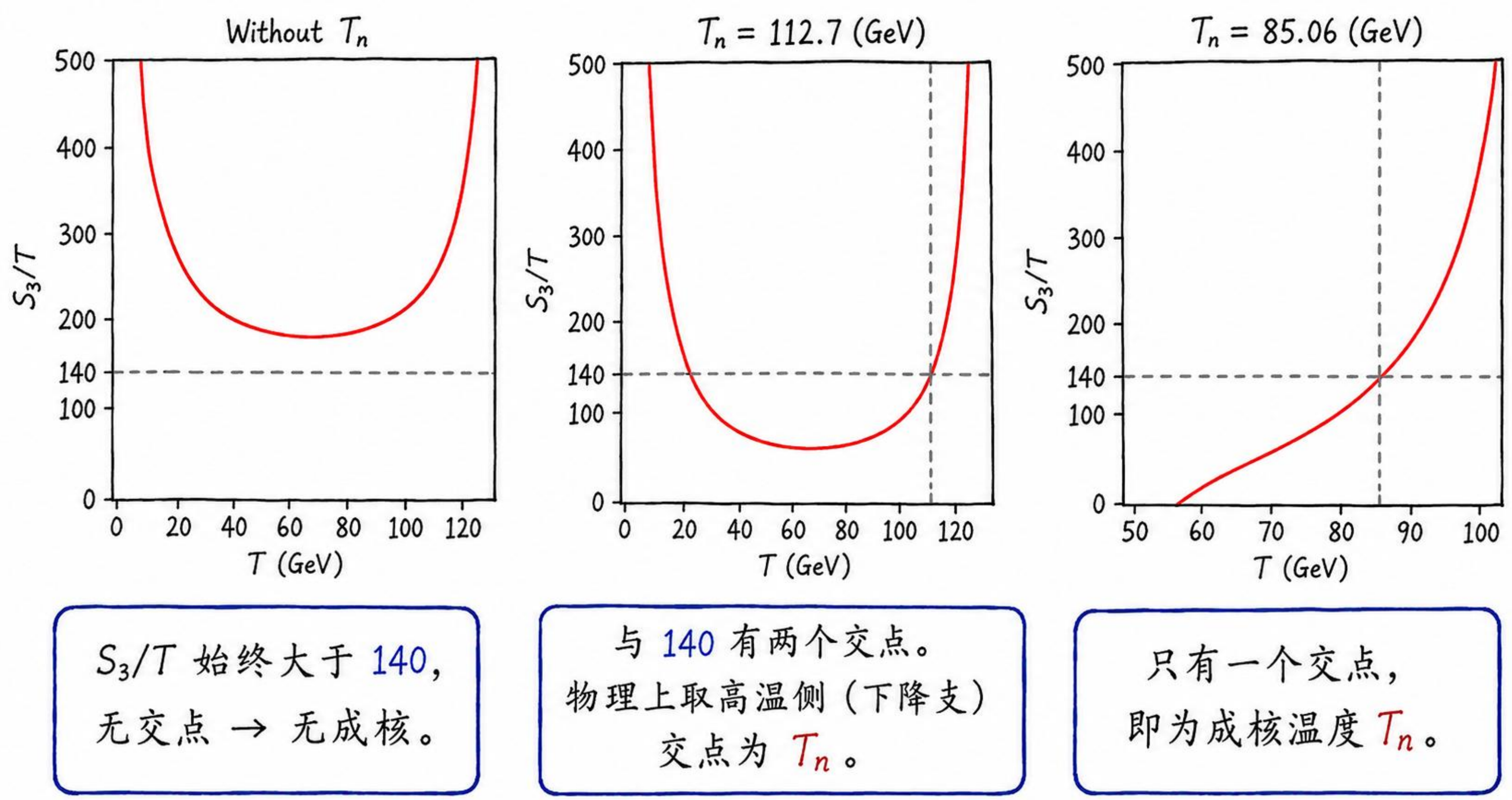
哈勃参数 $H^2(T) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\pi^2 g_*}{90} \frac{T^4}{m_{Pl}^2}$

约化普朗克质量 $m_{Pl} \simeq 2.43 \times 10^{18}$ GeV

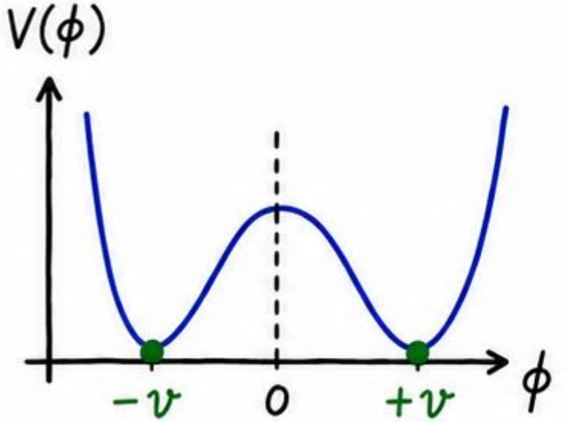
有效相对论自由度数 g_*

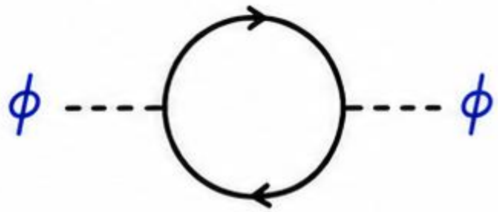
成核温度估计的经验条件 $\frac{S_3(T_n)}{T_n} \simeq 140$

三类S_3 /T曲线：无成核、双交点、单交点



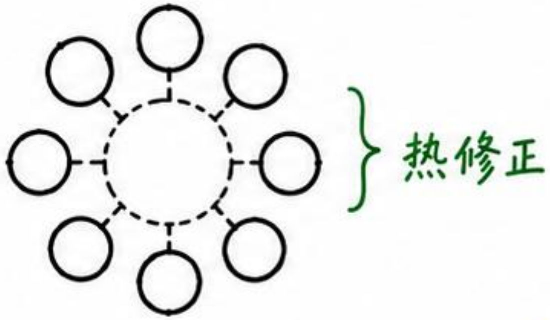
渗透温度



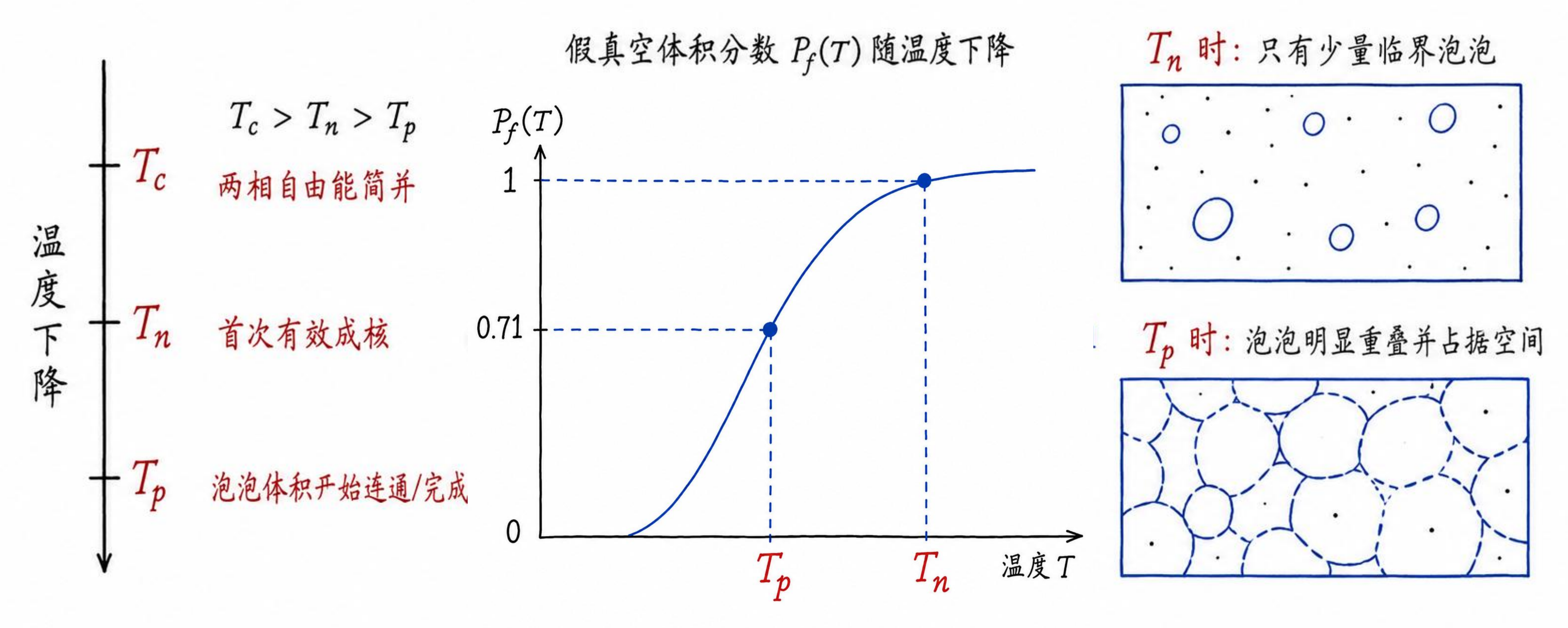


$$\beta = \frac{1}{T}$$

$$V_{eff} = V_0 + V_{CW} + V_T + V_{daisy}$$



为什么强过冷时T_N可能不够好



强过冷时，T_N只说明成核开始，不一定代表相变完成。

假真空体积占比

宇宙中某一给定空间点仍处于假真空的概率为

$$\boxed{P_f(t) = \exp[-V(t)]}$$

泡泡壁的传播距离

$$r(t',t) = \int_{t'}^{t} dt'' \frac{\xi_w(t'')}{a(t'')}$$

在时刻t'的物理体积为

$$V_{\rm phys}(t',t) = \frac{4\pi}{3} a^3(t') \left(\int_{t'}^{t} dt'' \frac{\xi_w(t'')}{a(t'')}\right)^3 \sim \frac{4\pi}{3} r^3$$

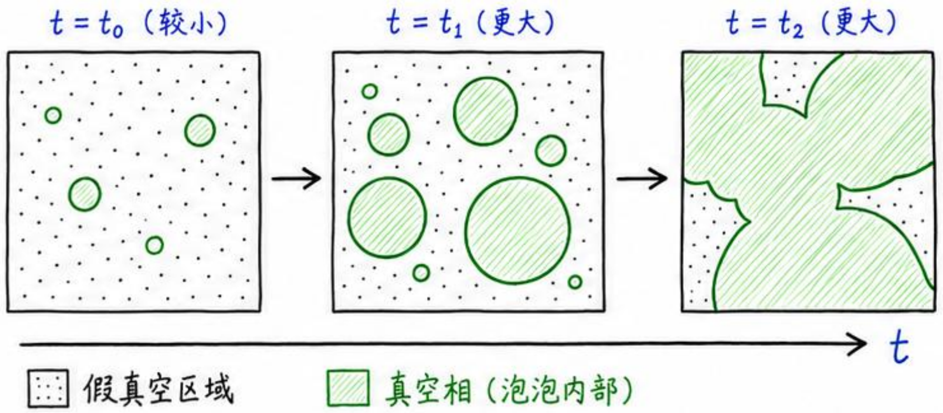
$$\boxed{P_f(t) = \exp\left[-\frac{4\pi}{3}\int_{t_c}^{t} dt'\,\Gamma(t')\,a^3(t')\left(\int_{t'}^{t} dt'' \frac{\xi_w(t'')}{a(t'')}\right)^3\right]}$$

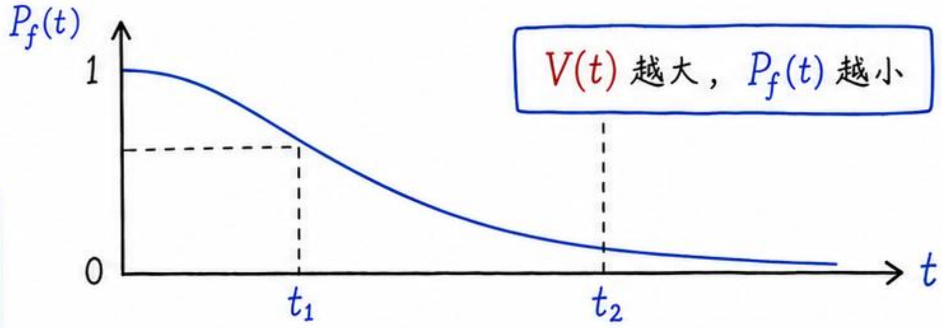
$$a(T) \propto 1/T \qquad \frac{dT}{dt} = -H(T)\,T$$

$$\boxed{P_f(T) = \exp\left[-\frac{4\pi}{3}\int_{T_c}^{T} \frac{dT'}{T'^4}\frac{\Gamma(T')}{H(T')}\left(\int_{T'}^{T} \frac{dT''}{H(T'')}\xi_w(T'')\right)^3\right]}$$

实际物理体积

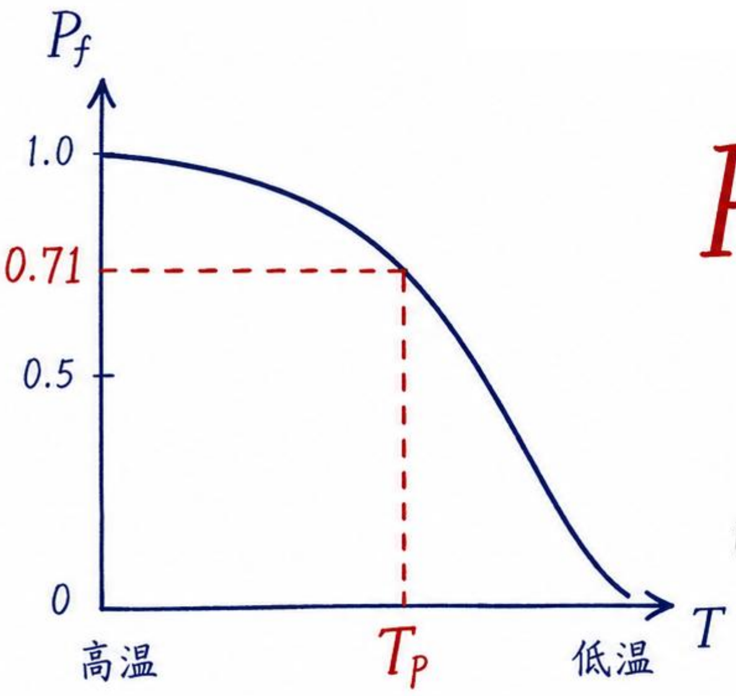
$$V(t) = \int_{t_c}^{t} dt'\,\Gamma(t')\,\boxed{V_{\rm phys}(t',t)}$$





渗透温度定义

$$P_f(T) = \exp\left[-\frac{4\pi}{3}\int_{T_c}^{T}\frac{dT'}{T'^4}\frac{\Gamma(T')}{H(T')}\left(\int_{T'}^{T}\frac{dT''}{H(T'')}\xi_w(T'')\right)^3\right]$$

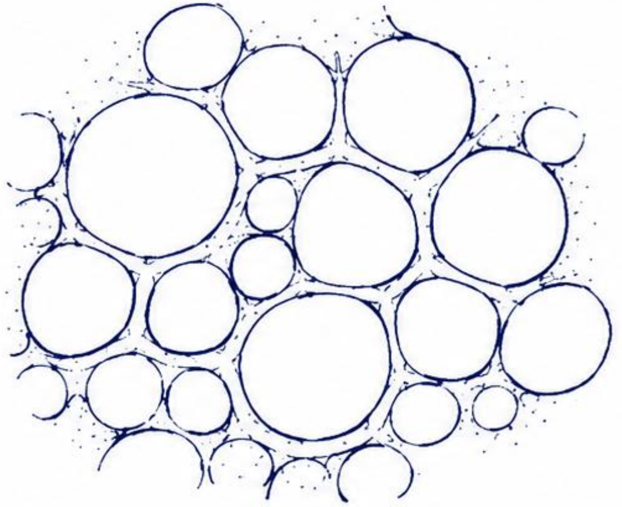


$P_f(T_P) = 0.71$

↓

约 29% 的空间

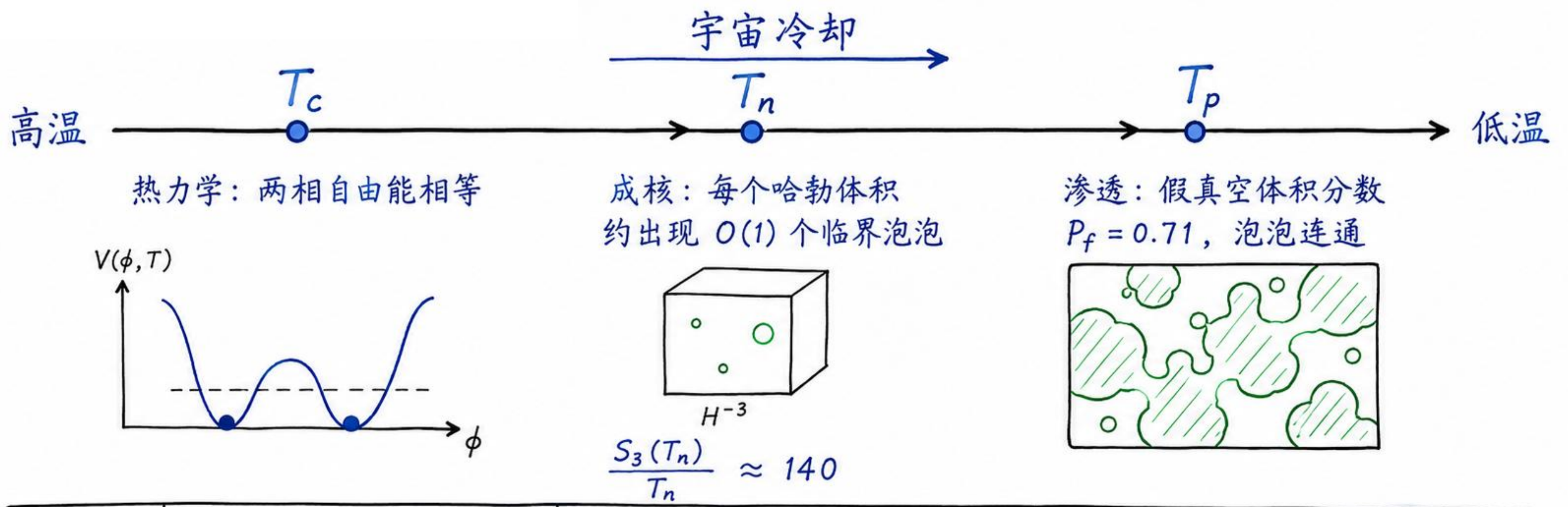
已转化为真空泡泡体积



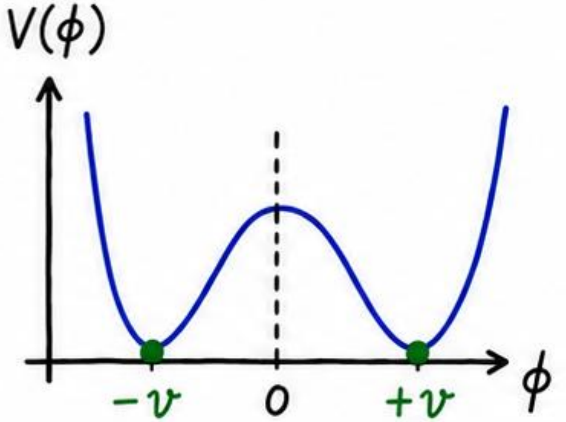
percolation：泡泡形成

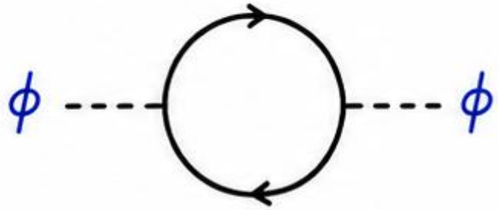
贯通结构

T_C，T_N，T_P的区别：热力学、成核、完成



温度	T_c（临界温度）	T_n（成核温度）	T_p（渗透温度）
判据	两相自由能相等 $V_{false}(T_c) = V_{true}(T_c)$	每个哈勃体积约出现 O(1) 个临界泡泡：$\frac{S_3(T_n)}{T_n} \approx 140$	假真空体积分数 $P_f = 0.71$（泡泡开始连通）
物理含义	无净驱动力，处于热平衡	量子涨落足以产生可长大的泡泡，相变开始成核但仍很稀疏	泡泡连通，相变迅速推进，更接近相变完成

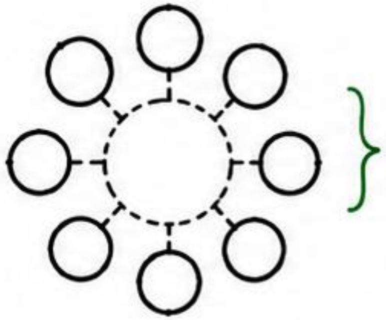




一阶相变引力波

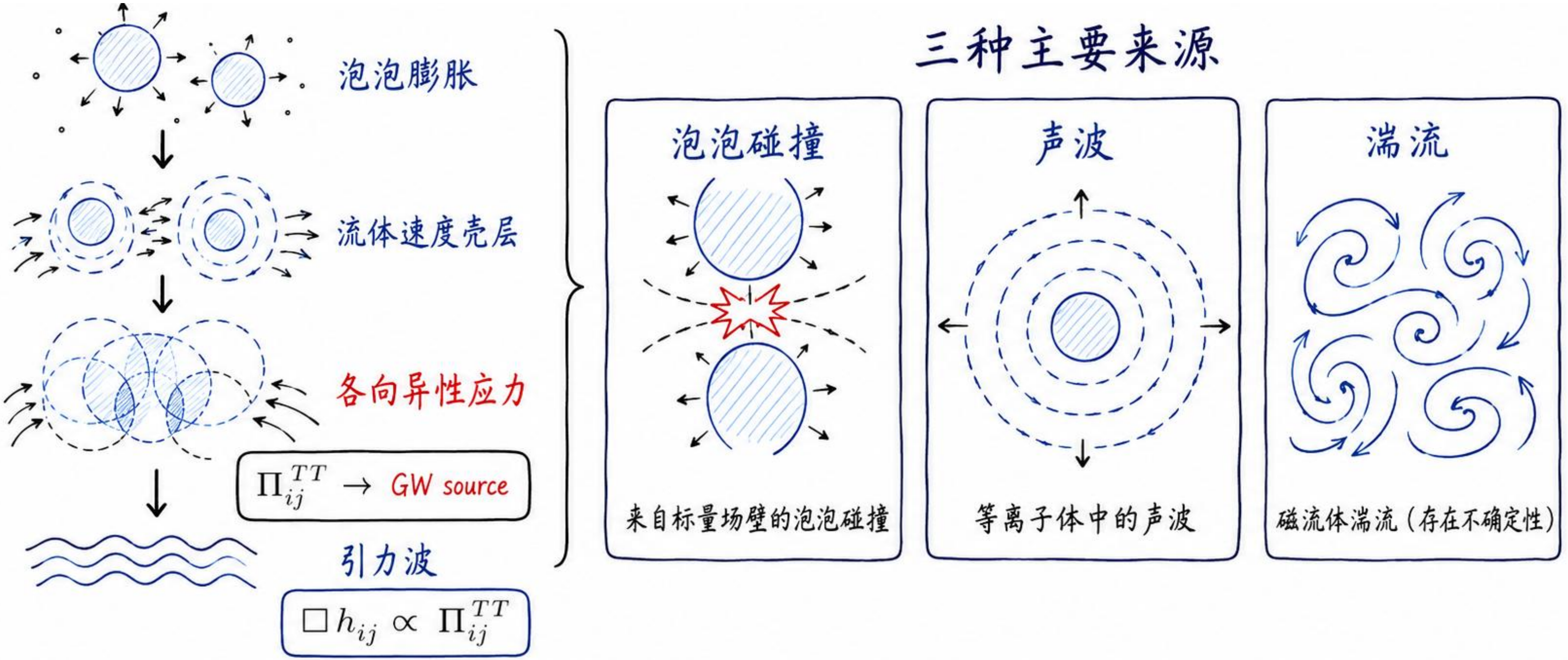
$$\beta = \frac{1}{T}$$

$$V_{eff} = V_0 + V_{CW} + V_T + V_{daisy}$$



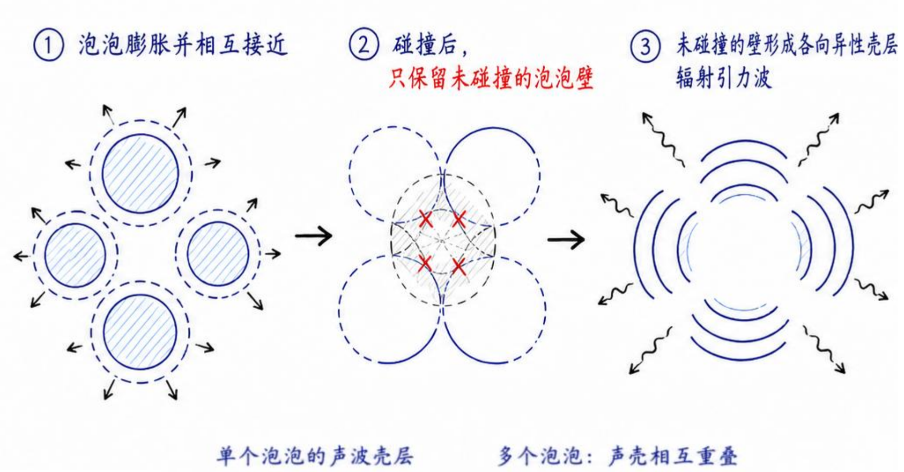
热修正

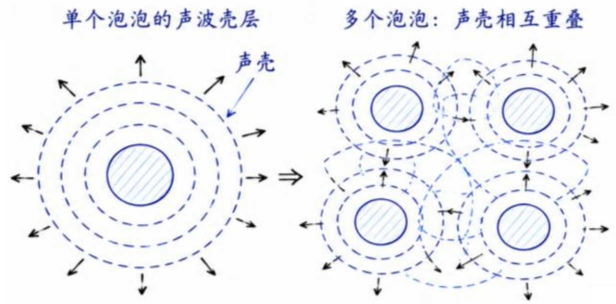
引力波三个来源

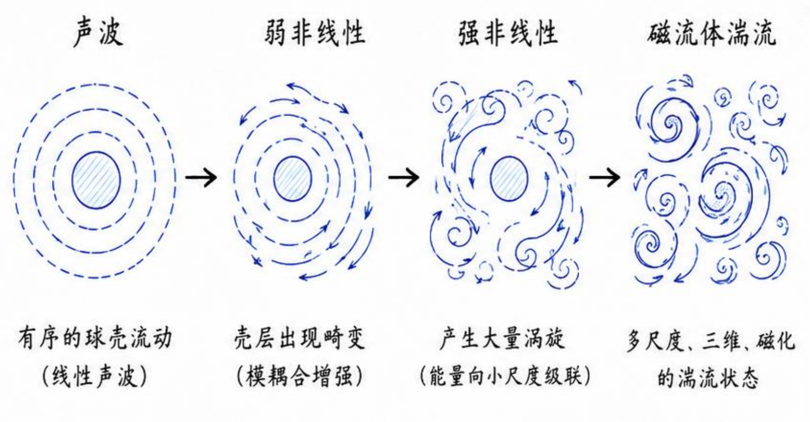


一阶相变引力波的能量来自相变过程中不均匀、非球对称的能量动量分布。各向异性应力是产生引力波的直接源。

引力波三个来源







描述了引力波谱的形状

$$\Omega_{\rm env}h^2(f) = 1.67\times10^{-5}\left(\frac{H_*}{\beta}\right)^2\left(\frac{\kappa_{\rm env}\alpha}{1+\alpha}\right)^2\left(\frac{100}{g_*}\right)^{1/3}\left(\frac{0.11\,\xi_w^3}{0.42+\xi_w^2}\right)\boxed{S_{\rm env}(f)}$$

$$f_{\rm env} = 1.65\times10^{-5}\,{\rm Hz}\,\frac{\beta}{H_*}\left(\frac{T_*}{100\,{\rm GeV}}\right)\frac{0.62}{1.8-0.1\,\xi_w+\xi_w^2}\left(\frac{g_*}{100}\right)^{1/6}$$

压低因子

$$\Omega_{\rm SW}h^2(f) = 2.65\times10^{-6}\left(\frac{H_*}{\beta}\right)\left(\frac{\kappa_{\rm sw}\alpha}{1+\alpha}\right)^2\left(\frac{100}{g_*}\right)^{1/3}\xi_w\,S_{\rm SW}(f)\boxed{\Upsilon(\tau_{\rm sw})}$$

$$f_{\rm SW} = 1.9\times10^{-5}\,{\rm Hz}\,\frac{1}{\xi_w}\left(\frac{\beta}{H_*}\right)\left(\frac{T_*}{100\,{\rm GeV}}\right)\left(\frac{g_*}{100}\right)^{1/6}$$

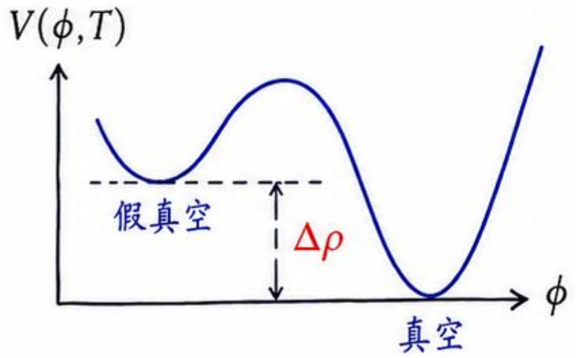
$$\Omega_{\rm turb}h^2(f) = 3.35\times10^{-4}\left(\frac{H_*}{\beta}\right)\left(\frac{\kappa_{\rm turb}\alpha}{1+\alpha}\right)^{3/2}\left(\frac{100}{g_*}\right)^{1/3}\xi_w\,S_{\rm turb}(f)$$

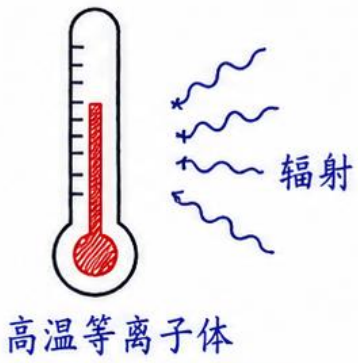
$$f_{\rm turb} = 2.7\times10^{-5}\,{\rm Hz}\,\frac{1}{\xi_w}\left(\frac{\beta}{H_*}\right)\left(\frac{T_*}{100\,{\rm GeV}}\right)\left(\frac{g_*}{100}\right)^{1/6}$$

核心输入参数:$\alpha, \beta/\mathrm{H}$

$$\Omega_{GW}h^2 \simeq \Omega_{env}h^2 + \Omega_{sw}h^2 + \Omega_{turb}h^2$$

α：相变强度（能量释放的大小）





α：真空能释放相对于辐射能量密度的比值

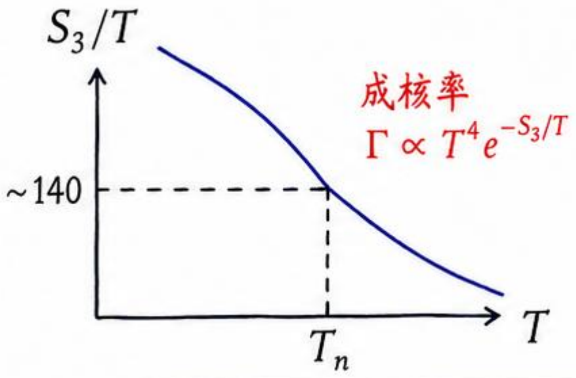
$$\alpha \sim \frac{\Delta\rho}{\rho_{rad}}$$

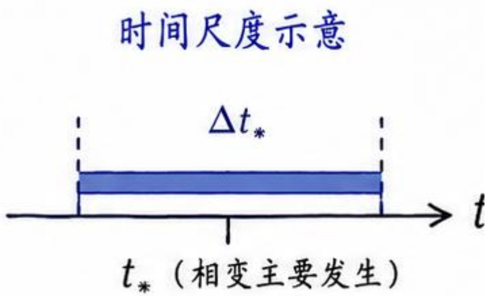
⟶ 决定相变强度

⟶ 影响能量分配 κ

⟶ 影响谱振幅

β/H：相变持续时间（快慢）





β/H：相变持续时间的无量纲刻画

$$\frac{\beta}{H} \sim T\,\frac{d(S_3/T)}{dT}\bigg|_{T_n}$$

⟶ 决定特征频率

⟶ 决定源持续时间

⟶ β/H 越小 ⟶ 谱越强、峰位越低

相变强度α

① 物理意义与一般定义

表征相变释放到等离子体的可用能量，相对于背景辐射能密度的大小

$$\boxed{\alpha = \frac{4\left(q_f(T_*) - q_t(T_*)\right)}{3\, w_f(T_*)}}$$

其中 q 代表所选热力学量，w_f 为假真空相焓密度。

若采用口袋模型 $w_f = 4\rho_R/3$，则 $\boxed{\alpha = \frac{q_f(T_*) - q_t(T_*)}{\rho_R(T_*)}}$

辐射能密度：$\boxed{\rho_R(T_*) = \frac{\pi^2}{30} g_* T_*^4}$

g_*：温度 T_* 时的相对论自由度数。

② 常见的 q 取值及对应的 α

A. $q = -p$（自由能） $V_{\rm eff} = -p$ $\alpha_{-p} = \frac{\Delta V_{\rm eff}}{\rho_R(T_*)}$ 直接用两相有效势能差表征驱动力。

B. $q = \rho$（能量密度） $\rho = -p + T\frac{dp}{dT}$ $\alpha_\rho = \frac{\Delta\left[V_{\rm eff} - T_*\left(\frac{dV_{\rm eff}}{dT_*}\right)\right]}{\rho_R(T_*)}$ 强调两相内能之差，最常见定义之一。

C. $q = \theta \equiv \frac{\rho - 3p}{4}$（迹反常） $\alpha_\theta = \frac{\Delta\left[V_{\rm eff} - \frac{T_*}{4}\left(\frac{dV_{\rm eff}}{dT_*}\right)\right]}{\rho_R(T_*)}$ 与流体动力学可用能量联系更直接。

D. $q = \bar{\theta}$（赝迹反常） $\bar{\theta}(T) = \frac{\rho(T)/4 - p(T)}{c_{s,t}^2(T)}$ （无独立 α 公式；按一般定义代入 $q = \bar{\theta}$ 即可） 推广到声速 $c_s \neq 1/\sqrt{3}$ 的一般情形。

☆ α 越大，表示相变可注入等离子体的能量越多，越有利于驱动声波、湍流，并增强相变引力波信号。

相变释放能量 → 声波/湍流 → GW

相变持续时间的倒数β/H

1. 定义与物理意义

$$\boxed{\beta \equiv \frac{\dot{\Gamma}}{\Gamma} = \frac{d}{dt}\ln\Gamma}$$

β 描述相变持续时间的倒数；
β 越大，相变越快。

$$\boxed{\Gamma(T) \sim A(T)\, e^{-S_3(T)/T}}$$

指数因子通常主导温度依赖。

2. 从成核率到 β/H_*

$$\beta = \frac{dT}{dt}\frac{d}{dT}\ln\Gamma$$

$$\downarrow$$

$$= \underbrace{\dot{T}\frac{d}{dT}}_{}\ln A(T) - \dot{T}\frac{d}{dT}\left(\frac{S_3(T)}{T}\right)$$

$\ln A(T)$ 变化较缓，可忽略

$$\downarrow$$

$$\boxed{\beta \approx -\dot{T}\frac{d}{dT}\left(\frac{S_3(T)}{T}\right)}$$

3. 辐射主导宇宙中的结果

$$T \propto a^{-1}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\dot{T}}{T} = -\frac{\dot{a}}{a} = -H$$

$$\downarrow$$

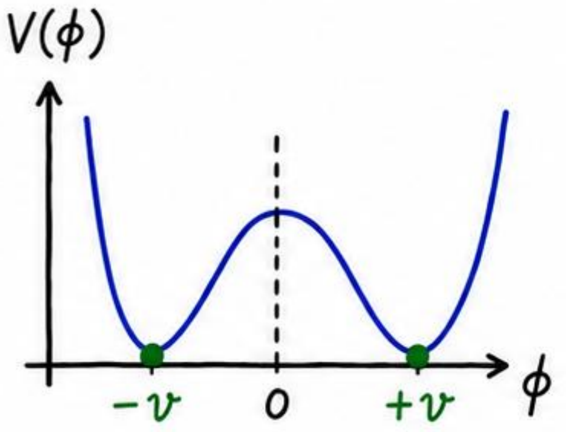
$$\dot{T} = -HT$$

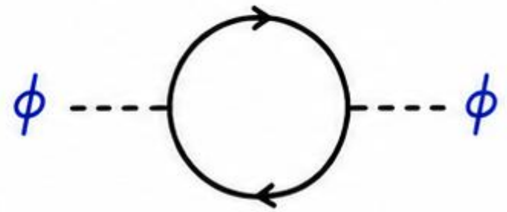
$$\boxed{\frac{\beta}{H_*} = T_*\frac{d}{dT}\left(\frac{S_3(T)}{T}\right)\Bigg|_{T_*}}$$

H_*：特征温度 T_* 处的哈勃参数

- β/H_* 小：相变持续更久，源寿命更长
- β/H_* 大：相变更快，典型时间尺度更短
- 它是预测相变引力波频率与强度的核心输入参数之一

S_3/T 曲线斜率 → β/H_* → GW 信号

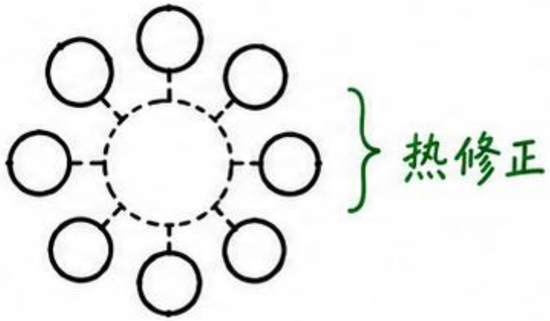




电弱相变基础总结

$$\beta = \frac{1}{T}$$

$$V_{eff} = V_0 + V_{CW} + V_T + V_{daisy}$$

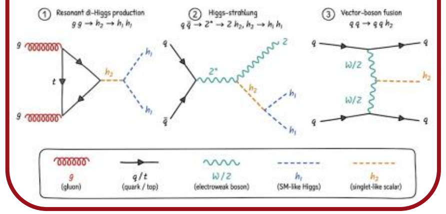


电弱相变(EWPT)研究流程:从理论到实验

理论基础与模型构建 » **数值模拟与分析** » **宇宙学与观测约束** » **实验验证与反馈循环**

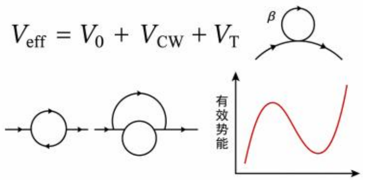
模型构建

(e.g..超出标准横型扩展(BSM)
如XSM.2HDM,2HOM+S)



有限温有效势能计算

$$V_{\text{eff}} = V_0 + V_{\text{CW}} + V_{\text{T}}$$

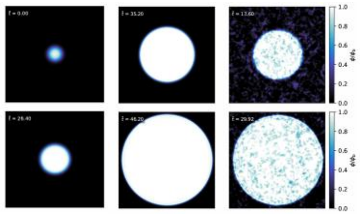


模型预测

(e.g..相变阶数，T_C ，v_C ，T_N)

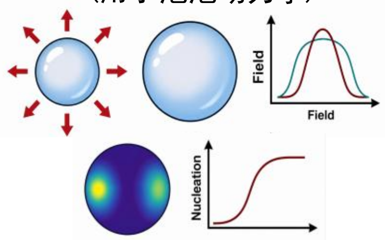
数值格点模拟

(Lattice)



相变动力学

(用于泡泡动力学)



重子不对称性

(e.g..电弱重子生成)

+ vs. −

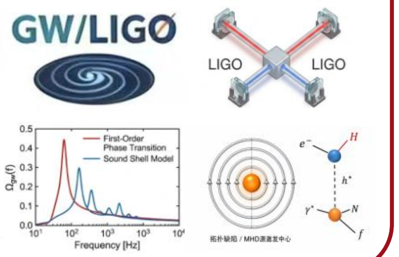
质子 vs. 反质子

✓ Sakharov 条件

✓ 重子不对称性参数 η

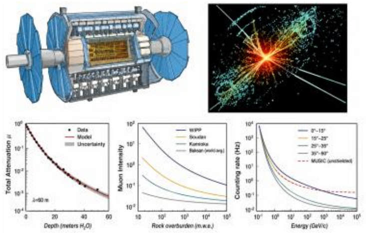
相变特征信号

(e.g..引力波(GW)，Primordial Magnetic 原磁场)



对撞机数据

(e.g..LHC,未来对撞机)



数据对比验证