

原子核中的量子纠缠

柏 栋

河海大学力学与工程科学学院

第二届核结构与反应少体问题研讨会
中国科学院近代物理研究所南方核科学理论研究中心

2025 年 01 月 15 日

《三体》智子



智子：

- 三体人将**质子**从十一维展开至二维，在上面蚀刻电路，改造为智能计算机“智子”，使该质子获得人工智能，并可通过终端控制。
- 一对智子可以通过**量子纠缠**实现了地球世界与三体世界的实时通讯。

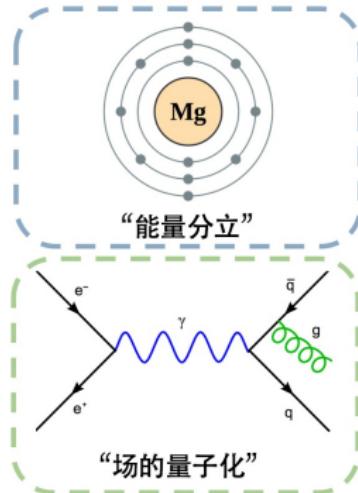
科学问题：

- 如何产生一对纠缠的核子？如纠缠的中子-质子对。

原子核量子特性

原子核的量子特性是低能核物理的重要研究对象。

“量子”三重奏

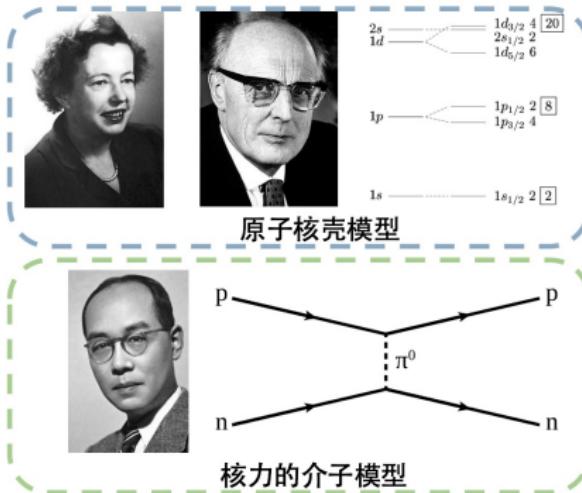


“能量分立”

“场的量子化”

“幽灵般的超距作用”

原子核物理



原子核壳模型

核力的介子模型

- 原子核具有怎样的量子纠缠性质？
- 如何合理量化原子核的量子纠缠性质？
- 原子核的量子纠缠性质与核力的基本性质之间存在何种内在联系？
-

原子核的量子纠缠特性

量子纠缠

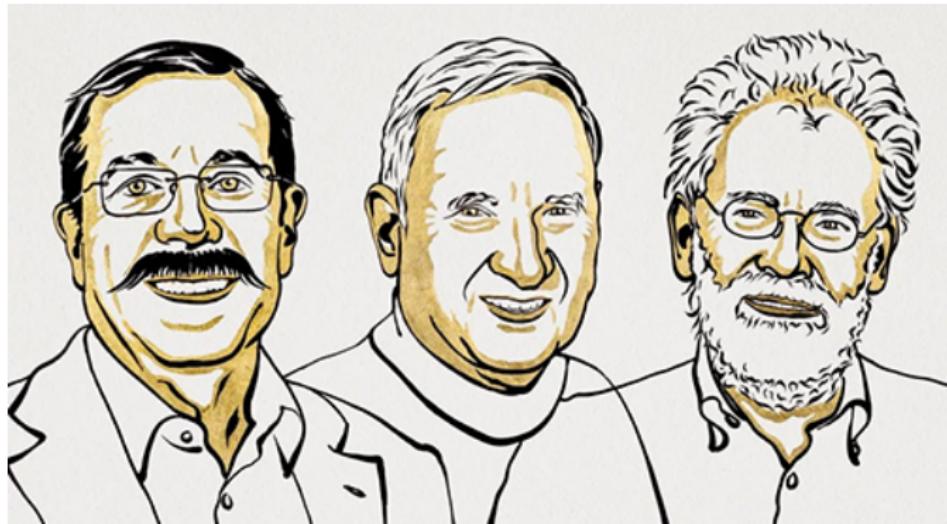
“量子纠缠”一词最早由薛定谔引入（1935），受 Einstein-Poldosky-Rosen (1935) 论文的启发。

◦ 在 1935 年论文的开头，薛定谔写道：

“When two systems, of which we know the states by their respective representatives, enter into temporary physical interaction due to known forces between them, and when after a time of mutual influence the systems separate again, then they can no longer be described in the same way as before, viz. by endowing each of them which a representative of its own. I would not call that *one* but rather *the* characteristic trait of quantum mechanics, the one that enforces its entire departure from classical lines of thought.”



九十年后，“量子纠缠”已经衍生出了一个庞大的产业。



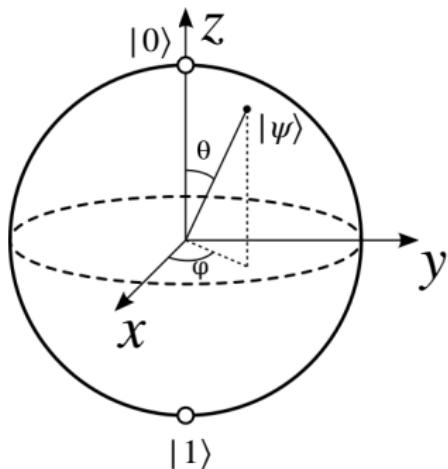
2022年，**阿兰·阿斯佩**，**约翰·克劳泽**，**安东·蔡林格**因“在有关量子纠缠的实验，确立贝尔不等式的违背验证以及开拓量子信息科学”的贡献获诺贝尔物理学奖。

量子比特: 量子二能级系统

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2) |0\rangle + \exp(i\varphi) \sin(\theta/2) |1\rangle,$$

其中, $|0\rangle = |\uparrow\rangle = [1, 0]^T$, $|1\rangle = |\downarrow\rangle = [0, 1]^T$ 。

布洛赫球: 将 $|\psi\rangle$ 看作球面上的一点



例如: 光子、电子、原子、**核子**、**原子核**, 等等。

Q: 什么是纠缠态?

A: 先确定希尔伯特空间中哪些态**不是纠缠态** (即所谓的**可分态**)，则剩下的态就是**纠缠态**。

- **可分态 (纯态)** : 如果一个 N 分态 ($N = 2$, 二分态) 可以分解成子系统量子态的张量积

$$|\Phi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\phi_2\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi_N\rangle,$$

则该量子态是**可分态**。

- **纠缠态**: 如果一个 N 分态不是**可分态**，则称它是**纠缠态**。
- 例如: 贝尔态

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle), \quad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle),$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \quad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle).$$

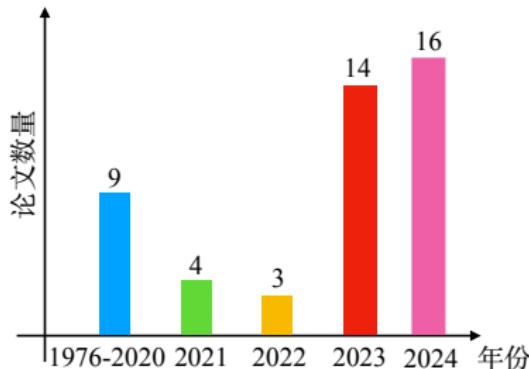
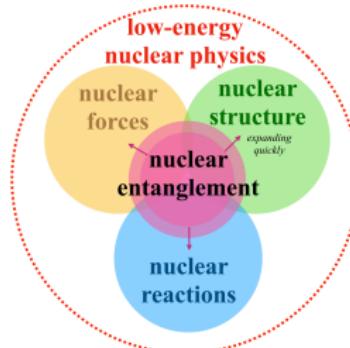
原子核中的量子纠缠

量子纠缠: 量子力学中一类经典物理禁忌的关联（“幽灵般的超距作用”），量子信息科学的核心概念，希尔伯特空间中的不可分态。



Wolfgang Mittig (MSU, John A. Hannah Distinguished Professor)

- M. Lamehi-Rachti and **W. Mittig**, *Quantum mechanics and hidden variables: A test of Bell's inequality by the measurement of the spin correlation in low-energy proton-proton scattering*, Phys. Rev. D **14**, 2543 (1976).



核纠缠的**产生、扩散、饱和与抑制**蕴涵了丰富的核结构和核反应信息，可以为核物理不同的研究主题提供统一的研究视角。

■ 核关联的新探针

核关联：

- 自旋关联，短程关联，双中子关联，双质子关联，四核子关联，…

量化关联强弱：

- 二分纯态关联强弱正比于冯诺伊曼熵（一种纠缠度量）

■ 核物理新型可观测量 \Rightarrow 新故事

- 传统核物理可观测量：自旋关联 $\langle ab \rangle \equiv \langle \sigma_A \cdot \mathbf{n}_a \sigma_B \cdot \mathbf{n}_b \rangle$ ，等等。
- 贝尔不等式， $|\langle ab \rangle + \langle a'b \rangle + \langle ab' \rangle - \langle a'b' \rangle| \leq 2$ ，区分量子力学和局域隐变量理论。
- 从多个简单可观测量出发，构造量子纠缠可观测量（形式更复杂） \Rightarrow 核物理新故事。
- 自旋关联的随机线性组合几乎不会带来新洞察。

■ 核物理交叉研究的新桥梁

- 核物理 + 量子计算
- 核物理 + 经典与量子复杂性
- 核物理 + 量子热化
- 核物理 + 量子退相干
- 核物理 + 黑洞信息佯谬

中子-质子散射中的自旋纠缠

核子-核子散射是低能核物理中一个重要的物理过程。

- 提供关键数据限制核力模型；
 - 为核子-原子核、原子核-原子核散射的微观描述提供理论输入。
- M. Lamehi-Rachti 和 W. Mittig (1976): 利用质子-质子散射检验贝尔不等式；被引 300+ 次，绝大多数为量子信息领域论文。

1976



Wolfgang Mittig (MSU, John A. Hannah Distinguished Professor)

- M. Lamehi-Rachti and **W. Mittig**, *Quantum mechanics and hidden variables: A test of Bell's inequality by the measurement of the spin correlation in low-energy proton-proton scattering*, Phys. Rev. D **14**, 2543 (1976).
- Citation: 300+, less known in nuclear physics.

2006



Hideyuki Sakai 酒井英行（东京大学）

- H. Sakai, T. Saito, T. Ikeda, K. Itoh, T. Kawabata, H. Kuboki, Y. Maeda, N. Matsui, C. Rangacharyulu, M. Sasano, Y. Satou, K. Sekiguchi, K. Suda, A. Tamii, T. Uesaka, and K. Yako, *Spin Correlations of Strongly Interacting Massive Fermion Pairs as a Test of Bell's Inequality*, Phys. Rev. Lett. **97**, 150405 (2006).
- Citation: 60+, less known in nuclear physics.



ELSEVIER

Physics Letters B

Volume 845, 10 October 2023, 138162



Spin entanglement in neutron-proton scattering

Dong Bai ✉ 2023年5月4日投稿

College of Science, Hohai University, Nanjing 211100, China

Received 4 May 2023, Revised 5 August 2023, Accepted 27 August 2023, Available online 1

September 2023, Version of Record 14 September 2023.

PHYSICAL REVIEW C

covering nuclear physics

Entanglement maximization in low-energy neutron-proton scattering

Gerald A. Miller

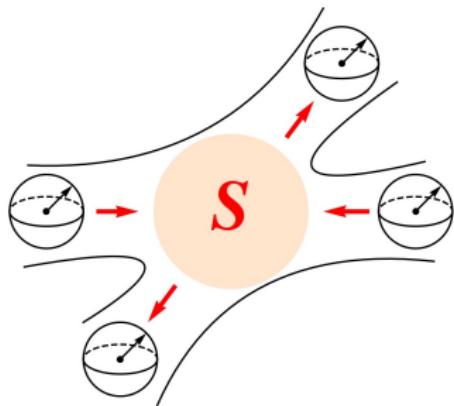
Phys. Rev. C **108**, L031002 – Published 28 September 2023

Received 16 June 2023 Accepted 20 September 2023



2023年6月16日投稿

■ 基本图像：可分辨量子比特（中子-质子）相互散射（全同量子比特，如质子-质子、中子-中子，更复杂）。



给定初态 $|\text{in}\rangle = |\mathbf{p}\rangle |\chi_{\text{in}}\rangle$ ，末态可表示为

$$|\text{out}\rangle = \int d^2\hat{\mathbf{p}}' |\mathbf{p}'\rangle \hat{S}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) |\chi_{\text{in}}\rangle,$$

$$\hat{S}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \equiv \sum_{m'_1 m'_2 \\ m_1 m_2} \hat{S}_{m'_1 m'_2 m_1 m_2}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) |m'_1 m'_2\rangle \langle m_1 m_2|,$$

$$\text{其中, } \langle \mathbf{p}' m'_1 m'_2 | S | \mathbf{p} m_1 m_2 \rangle = \frac{\delta(E_{\mathbf{p}'} - E_{\mathbf{p}})}{\mu p} \times \hat{S}_{m'_1 m'_2 m_1 m_2}(\mathbf{p}', \mathbf{p}).$$

■ 研究目标：考虑所有分波，严格计算中子-质子 S 矩阵的自旋纠缠，并分析其性质。

◦ 给定 $\hat{S}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \delta^2(\hat{\mathbf{p}}' - \hat{\mathbf{p}}) \mathbf{1}_4 + i \frac{p}{2\pi} \mathbf{M}(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ ，特定末态动量 $\mathbf{p}' \neq \mathbf{p}$ 处的自旋波函数可表示为

$$|\text{out}\rangle = \int d^2\hat{\mathbf{p}}' |\mathbf{p}'\rangle \hat{S}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) |\chi_{\text{in}}\rangle \Rightarrow |\chi_{\text{out}}\rangle = \mathbf{M}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) |\chi_{\text{in}}\rangle.$$

中子-质子自旋振幅：

自旋振幅 $M(p', p)$ 是一个 4×4 矩阵，可以利用基矢 $\{\sigma_\mu \otimes \sigma_\nu\}$ 展开，其中 $\sigma_\mu = (\mathbf{1}_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ 。

- 相关研究最早由 **Wolfenstein** 在上世纪五十年代做出。
- 随后，其他课题组给出类似结果，如 **Saclay**、Hoshizaki、Helicity、Singlet-Triplet。

Saclay 振幅系统：

$$M(p', p)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left\{ (a + b) + (a - b)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n}) + (c + d)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{m})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{m}) \right. \\ &\quad \left. + (e - f)(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{l})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{l}) + (e + f)\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{n} + (e - f)\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{n} \right\}, \end{aligned}$$

其中， \mathbf{l} 、 \mathbf{m} 、 \mathbf{n} 为单位向量

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{p}' + \mathbf{p}}{|\mathbf{p}' + \mathbf{p}|}, \quad \mathbf{m} = \frac{\mathbf{p}' - \mathbf{p}}{|\mathbf{p}' - \mathbf{p}|}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{p} \times \mathbf{p}'}{|\mathbf{p} \times \mathbf{p}'|},$$

a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 为六个 Saclay 振幅，是相对动量 p 以及 \mathbf{p} 与 \mathbf{p}' 夹角 θ 的函数。

■ 纠缠并发度：精细刻画末态 $|\chi_{\text{out}}\rangle$ 的纠缠性质。

◦ 给定末态 $|\chi_{\text{out}}\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$, 相应的纠缠并发度可表示为

$$\Delta(p, \theta) = 2|\alpha\delta - \beta\gamma|,$$

满足 $0 \leq \Delta(p, \theta) \leq 1$, $\Delta(p, \theta) = 0$ 和 $\Delta(p, \theta) = 1$ 分别对应可分态和最大纠缠态。

■ 纠缠能力：量化量子算符产生纠缠的能力

$$\mathcal{E}(\mathbf{M}) = \int \frac{d\Omega_1}{4\pi} \int \frac{d\Omega_2}{4\pi} (1 - \text{Tr}_1(\rho_1^2)),$$

$$|\chi_{\text{in}}\rangle = [\cos(\theta_1/2)|\uparrow\rangle_1 + \exp(i\phi_1)\sin(\theta_1/2)|\downarrow\rangle_1] \\ \otimes [\cos(\theta_2/2)|\uparrow\rangle_2 + \exp(i\phi_2)\sin(\theta_2/2)|\downarrow\rangle_2],$$

$$|\chi_{\text{out}}\rangle = \mathbf{M}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) |\chi_{\text{in}}\rangle,$$

$$\rho_{12} = |\chi_{\text{out}}\rangle\langle\chi_{\text{out}}| / \langle\chi_{\text{out}}|\chi_{\text{out}}\rangle, \quad \rho_1 = \text{Tr}_2(\rho_{12}),$$

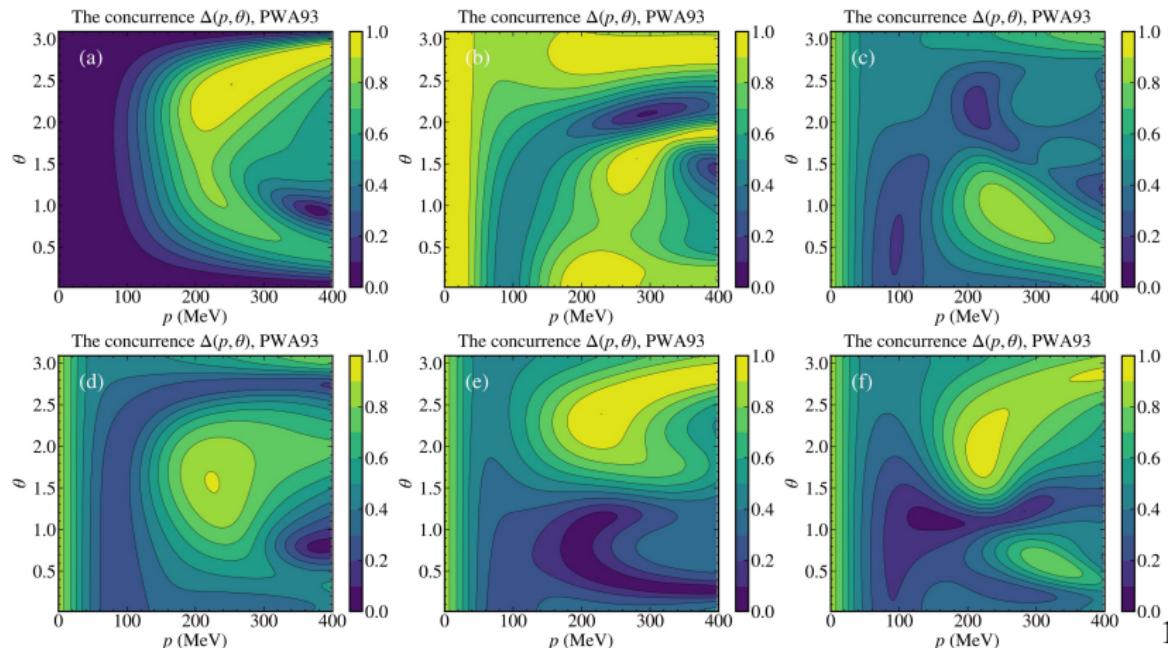
计算了末态 $|\chi_{\text{out}}\rangle$ 的纠缠性质，并对所有可能的初态取平均。

P. Zanardi, Phys. Rev. A **63**, 040304(R) (2001)

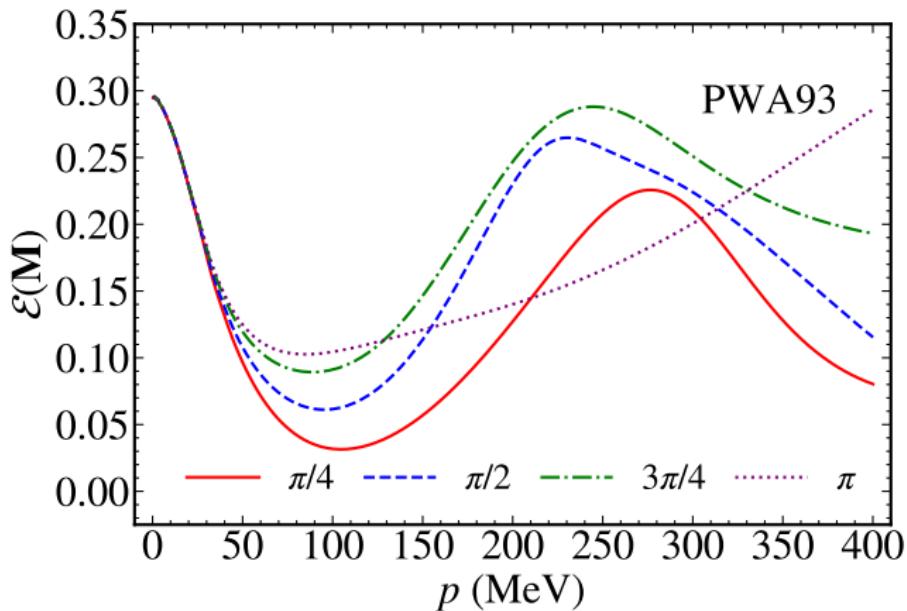
数值结果

初始自旋取不同构型时，末态纠缠并发度 $\Delta(p, \theta)$ 对相对动量 p 和散射角 θ 的依赖关系。

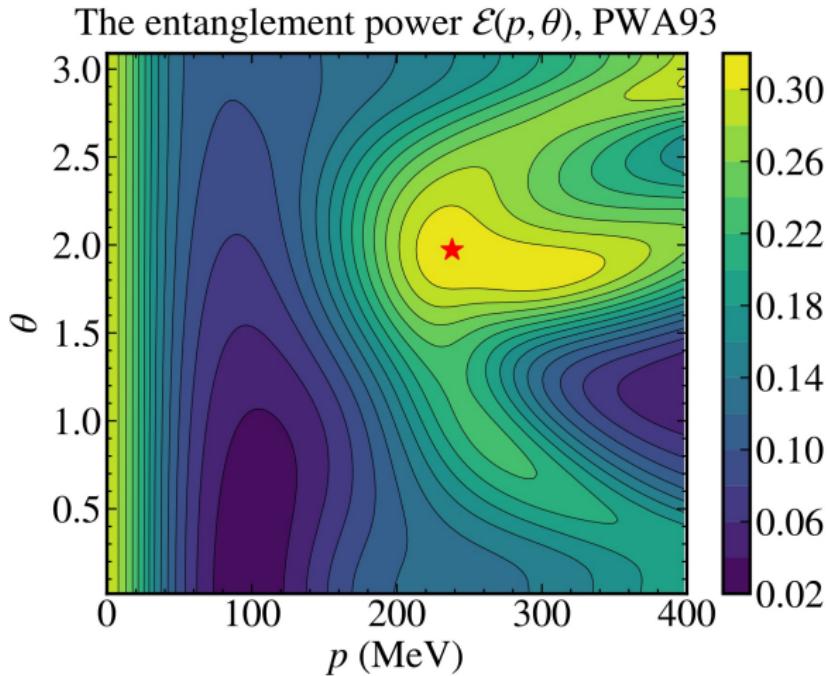
- (a) $|\uparrow\uparrow\rangle$, (b) $|\uparrow\downarrow\rangle$, (c) $|\uparrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$, (d) $|\uparrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$, (e) $|\uparrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)$, (f) $|\uparrow\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle)$



散射角处 $\theta = \pi/4$ 、 $\pi/2$ 、 $3\pi/4$ 和 π ，中子-质子散射纠缠能力 $\mathcal{E}(M)$ 随相对动量 p 的变化关系。



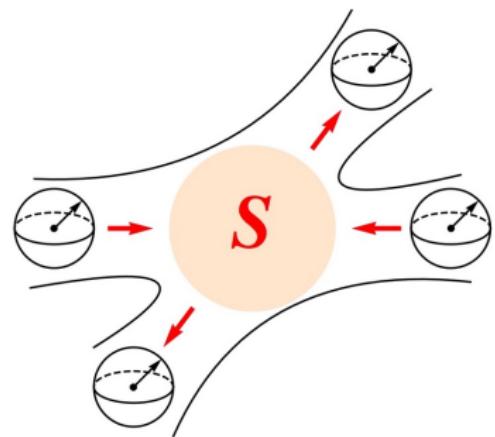
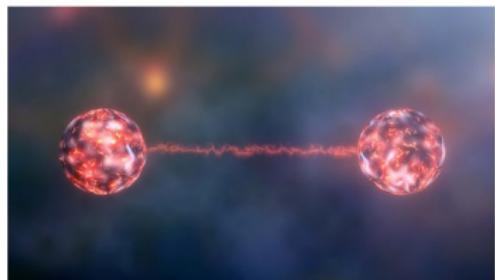
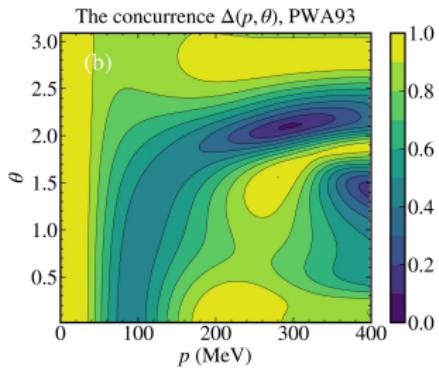
纠缠能力 $\mathcal{E}(M)$ 对相对动量 p 和散射角 θ 的依赖关系。 $\mathcal{E}(M)$ 在 $(p, \theta) = (238 \text{ MeV}, 113^\circ)$ 处取极大值。



Q: 如何产生一对纠缠的核子-核子对，并对其自旋纠缠进行调控？

A: 基本思路，利用核子-核子散射。

- 1 选定初始自旋构型，理论计算中子-质子散射末态的自旋纠缠并发度，确定产生特定自旋纠缠性质所需的散射能量和散射角度。
- 2 根据理论计算结果，调整加速器能量进行实验，并在相应的散射角度处放置狭缝筛选出射中子-质子对。



纠缠极值与对称性涌现

- 当相对动量 $p \ll M_\pi$, 中子-质子散射可用领头阶无 π 介子有效场论描述

$$\mathcal{L}_{\text{LO}} = \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{int}},$$

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = N^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2M_N} \right) N,$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{C_S}{2}(N^\dagger N)(N^\dagger N) - \frac{C_T}{2}(N^\dagger \boldsymbol{\sigma} N) \cdot (N^\dagger \boldsymbol{\sigma} N),$$

其中, $N = (n_\uparrow, n_\downarrow, p_\uparrow, p_\downarrow)^T$ 是核子场, C_S 和 C_T 是低能常数。

- 相应的, 中子-质子 S 矩阵可表示为

$$\hat{\mathbf{S}}(p) = \delta^2(\hat{p}' - \hat{p})\hat{\mathbf{1}}_4 + i\frac{p}{2\pi}\mathbf{M}(p),$$

$$\mathbf{M}(p) = \frac{1}{8ip} \left[(3e^{2i\delta_1} + e^{2i\delta_0} - 4)\hat{\mathbf{1}}_4 + (e^{2i\delta_1} - e^{2i\delta_0})\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \right],$$

其中, δ_0 和 δ_1 分别为 1S_0 和 3S_1 散射相移。

■ 有效力程展开

在低能极限下 $p \rightarrow 0$,

$$e^{2i\delta_{0,1}} = \frac{1 + i \tan \delta_{0,1}}{1 - i \tan \delta_{0,1}} = \frac{1 - ipa_{0,1}}{1 + ipa_{0,1}},$$

其中, a_0 和 a_1 是 1S_0 和 3S_1 波散射长度,

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}(a_0, a_1) \\ &= \lim_{p \rightarrow 0} \mathbf{M} \\ &= \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(a_0 + a_1) & \frac{1}{2}(a_0 - a_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(a_0 - a_1) & -\frac{1}{2}(a_0 + a_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■ Wigner 对称性

核子场 $N = (n_\uparrow, n_\downarrow, p_\uparrow, p_\downarrow)^T$ 是 $SU(4)$ 群的基础表示

$$N \rightarrow SU(4)N.$$

当 $C_T \rightarrow 0$ 时，变成领头阶无 π 介子有效场论的精确对称性

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{C_S}{2}(N^\dagger N)(N^\dagger N).$$

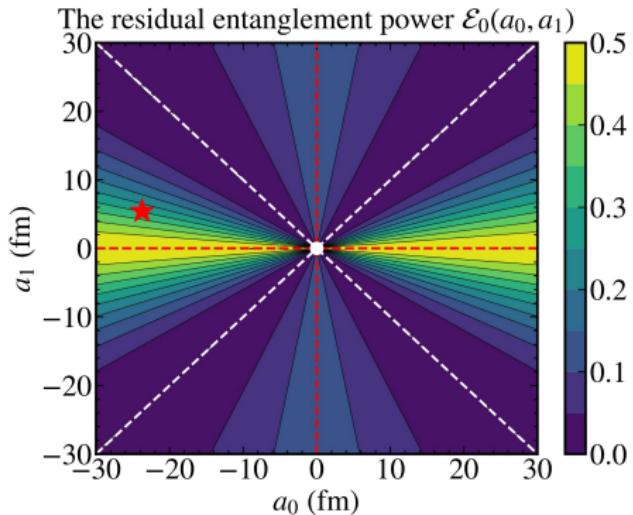
相应的，散射长度满足 $a_0 = a_1$.

■ Schrödinger 对称性（非相对论共形不变性）

当 $(|a_0|, |a_1|) = (0, 0)、(0, \infty)、(\infty, 0)$ 和 (∞, ∞) 时，领头阶无 π 介子有效场论具有 Schrödinger 对称性。

■ 对称性涌现与自旋纠缠是否存在联系?

- 相关研究最早见 S. R. Beane *et al.*, Phys. Rev. Lett. **122**, 102001 (2019).
- 研究了剩余纠缠能力 $\mathcal{E}_0(a_0, a_1)$ 与对称性涌现的关联



- 对称性涌现出现在 $a_0 = a_1 \rightarrow$ Wigner 对称性, $(|a_0|, |a_1|) = (0, 0)$ 、 $(0, \infty)$ 、 $(\infty, 0)$ 和 $(\infty, \infty) \rightarrow$ Schrödinger 对称性。
 - 纠缠极值出现在 $|a_0| = |a_1|$, $(|a_0|, |a_1|) = (0, \infty)$ 和 $(\infty, 0)$ 。
- ⇒ 纠缠极值是中子-质子系统出现对称性涌现的必要条件。

核子自旋纠缠的实验测量方案

■ 实验上如何测核纠缠? (短期高价值目标)

Quantum
Optics

Experimental determination of entanglement with a single measurement

S. P. Walborn , P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, F. Mintert & A. Buchleitner

Nature 440, 1022–1024 (2006) | [Cite this article](#)

Condensed
Matter
Physics

Measuring entanglement entropy in a quantum many-body system

Rajibul Islam, Ruichao Ma, Philipp M. Preiss, M. Eric Tai, Alexander Lukin, Matthew Rispoli & Markus Greiner

Nature 528, 77–83 (2015) | [Cite this article](#)

High
Energy
Physics

Observation of quantum entanglement with top quarks at the ATLAS detector

The ATLAS Collaboration

Nature 633, 542–547 (2024) | [Cite this article](#)

Nuclear
Physics

Nuclear entanglement in two-proton radioactivity, fission, collective motion, knockout reaction?

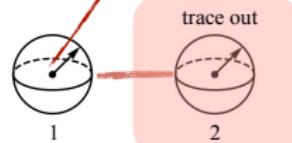
量子比特: 量子二能级系统, 希尔伯特空间由 $|0\rangle \leftrightarrow |\text{spin-up}\rangle$ 和 $|1\rangle \leftrightarrow |\text{spin-down}\rangle$ 张成。

two-qubit system

Concurrence

$$C_{1|2}(|\Psi_{12}\rangle) = \sqrt{2[1 - \text{tr}(\rho_1^2)]}$$

ρ_1 : reduced density matrix of the 1st qubit



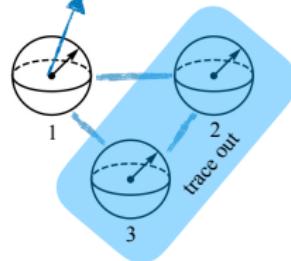
three-qubit system

Genuine tripartite entanglement

$$C_{\text{GMC}}(|\Psi_{123}\rangle) = \min\{C_{1|23}, C_{2|13}, C_{3|12}\},$$

$$C_{\text{GBC}}(|\Psi_{123}\rangle) = [C_{1|23}C_{2|13}C_{3|12}]^{\frac{1}{3}},$$

ρ_1 : reduced density matrix of the 1st qubit



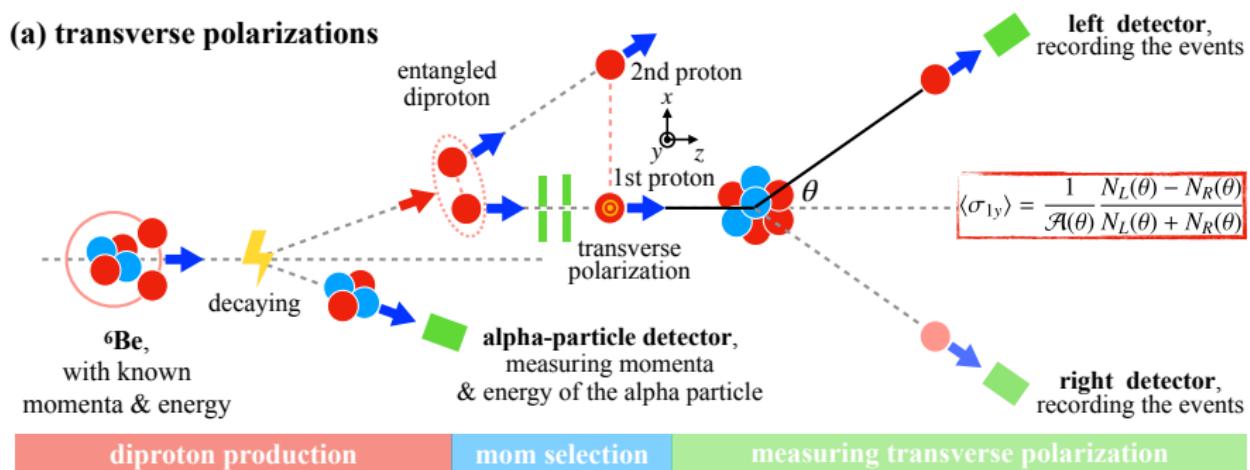
Quantum state tomography

$$\rho_i = \frac{1}{2}(1 + \langle \sigma_{ix} \rangle \sigma_{ix} + \langle \sigma_{iy} \rangle \sigma_{iy} + \langle \sigma_{iz} \rangle \sigma_{iz}).$$

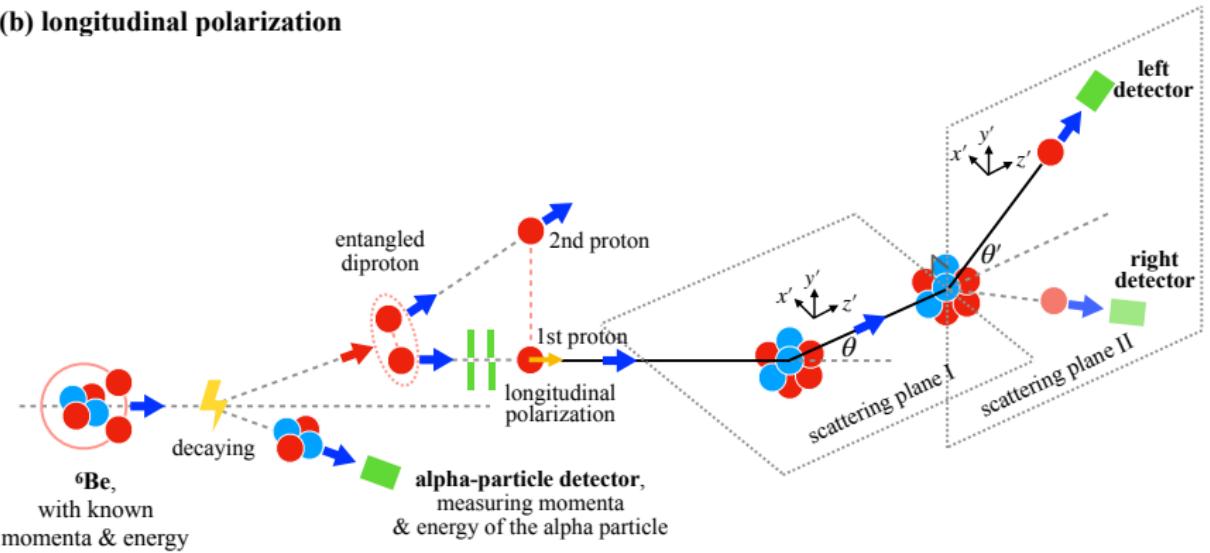
→ measure three spin polarizations of the i th nucleon along the x, y, z axes.

- ^6Be 原子核自发放出纠缠的双质子
 → 动量选择（自旋纠缠依赖于动量）
 → 测量其中一个质子的横向和纵向激化
 → 从实验数据重构越化密度矩阵 ρ_1
 → 计算纠缠并法度 $\mathcal{C}_{1|2}(|\Psi_{12}\rangle)$

(a) transverse polarizations



(b) longitudinal polarization



diproton production

mom selection

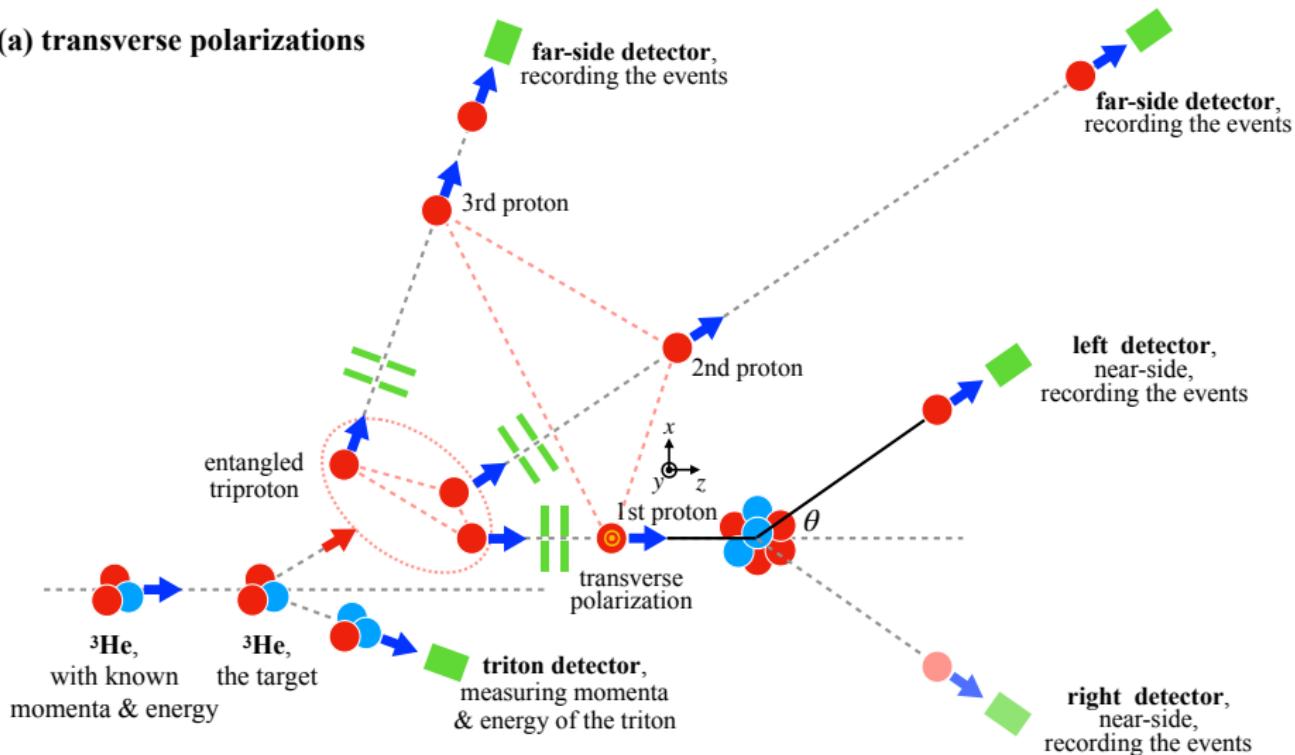
measuring longitudinal polarization

$$\langle \sigma_{1z} \rangle = \frac{1}{\mathcal{K}_z^{x'}(\theta)} \{ \langle \sigma_{1x'} \rangle [1 + \langle \sigma_{1y} \rangle \mathcal{A}(\theta)] - \langle \sigma_{1x} \rangle \mathcal{K}_x^{x'}(\theta) \},$$

$$\langle \sigma_{1x'} \rangle = \frac{1}{\mathcal{A}'(\theta')} \frac{N'_L(\theta') - N'_R(\theta')}{N'_L(\theta') + N'_R(\theta')}.$$

三质子自旋纠缠的实验测量方案

(a) transverse polarizations

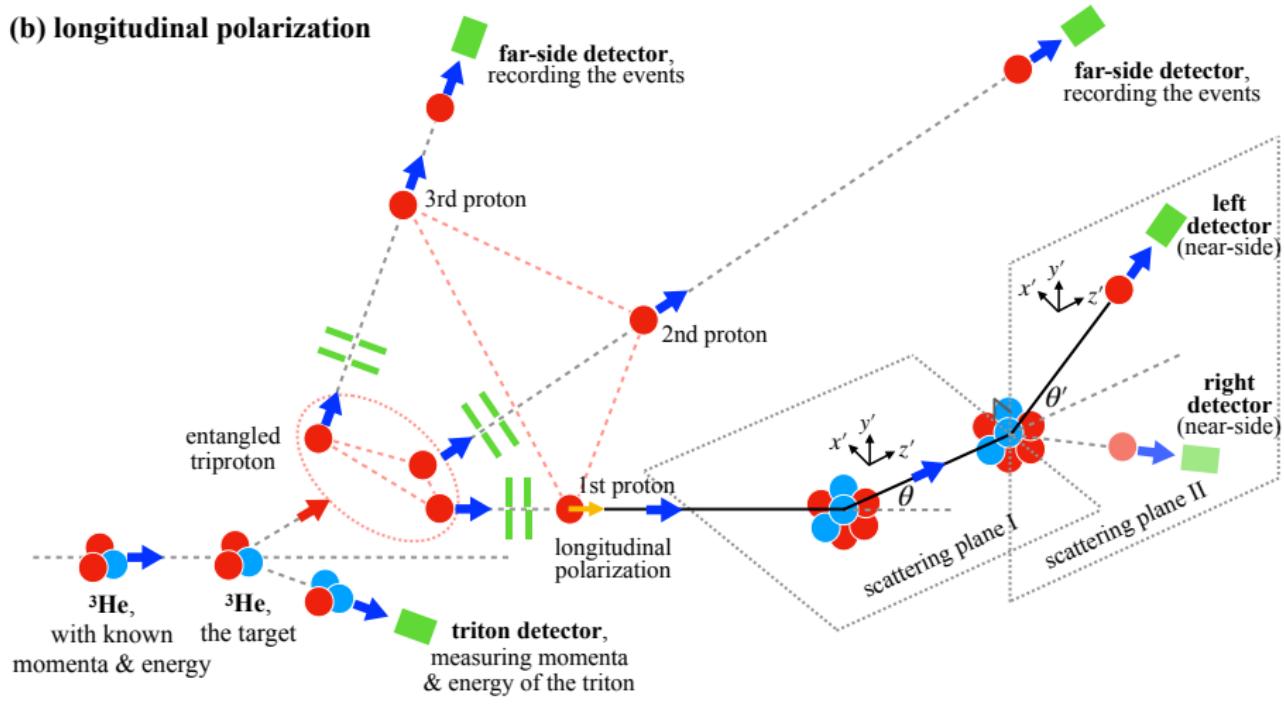


triproton production

mom selection

measuring transverse polarization

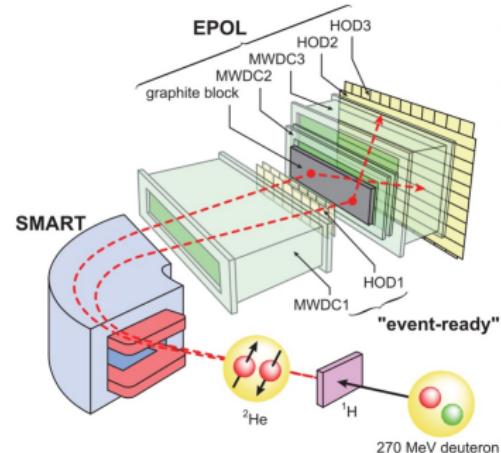
(b) longitudinal polarization



量子纠缠一定很脆弱吗？

H. Sakai et al., Phys. Rev. Lett. 97, 150405 (2006)

It is very impressive that the experimental data follow the quantum mechanical prediction faithfully for the entire angular region and they exceed Bell's limit over a wide angular range. We obtained $S_{\text{exp}}(\pi/4) = 2.83 \pm 0.24_{\text{stat}} \pm 0.07_{\text{sys}}$, which violates the inequality at a confidence level of 99.3%. It is to be noted that the entanglement of the spin-singlet state was retained even when the two protons traversed through large amounts of material media (50 cm thick argon + ethane gas in wire chambers, 1 cm thick plastic scintillators, and up to 5 cm thick graphite slab). It is indeed remarkable that the strongly interacting pairs maintain the correlations for distances greater than 10^{13} – 10^{14} times their coherence length, which was estimated to be 10^{-14} m (the size of a wave packet of two protons at production).



质子通过大量介质后（甚至包括5厘米厚的碳板），质子自旋之间的量子纠缠几乎没有被破坏！核物理能标比实验室环境能标高六个数量级，相比凝聚态系统中的量子纠缠，原子核量子纠缠不容易受到环境影响。

Martin Savage: 从量子纠缠到量子复杂性 (quantum complexity, 在量子计算机上实现特定任务的难易程度)

- C. E. P. Robin and M. J. Savage, *The magic in nuclear and hypernuclear forces*, arXiv:2405.10268.
- F. Brökmemeier, S. M. Hengstenberg, J. W. T. Keble, C. E. P. Robin, F. Rocco, and M. J. Savage, *Quantum magic and multi-partite entanglement in the structure of nuclei*, arXiv:2409.12064.

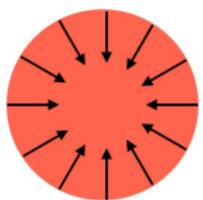
Many-body Quantum Magic (MBQM-2025)

Organizers: Tobias Haug (TII, UAE), Caroline Robin (Bielefeld University , Germany), Emanuele Tirrito (ICTP, Trieste, Italy), and Xhek Turkeshi (University of Cologne, Germany)

Nonstabilizerness, also called "magic", is an expensive ingredient needed to power universal quantum computers. The resource theory of magic characterizes the cost of preparing quantum states and running quantum algorithms. Recently, there has been tremendous interest in understanding the complexity of quantum systems using the resource theory of magic. This workshop aims to bring together leading researchers in the field to foster collaborations and discussions.

复合核反应中的量子信息

信息佯谬：纯态 \rightarrow 幺正演化 \rightarrow 混合态，违反量子力学

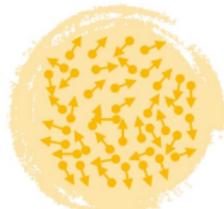


大质量坍缩（纯态）

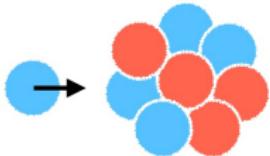
幺正演化



幺正演化



霍金辐射（疑似混合态）



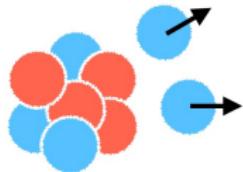
中子俘获（纯态）

幺正演化



复合核

幺正演化



蒸发中子（疑似混合态）

• 玻尔独立假设：复合核的形成与衰变相互独立，**违反幺正性！**

• 复合核：**复杂的多体纠缠纯态**

• 本征态热化假设，量子混沌，量子复杂度，量子计算

复合核反应中的量子热化

波尔的复合核图像：复合核中的核子可以达到热平衡。原子核是孤立系统，热平衡状态应当由**微正则系综**描述。

Hauser-Feshbach模型

蒸发粒子能谱公式

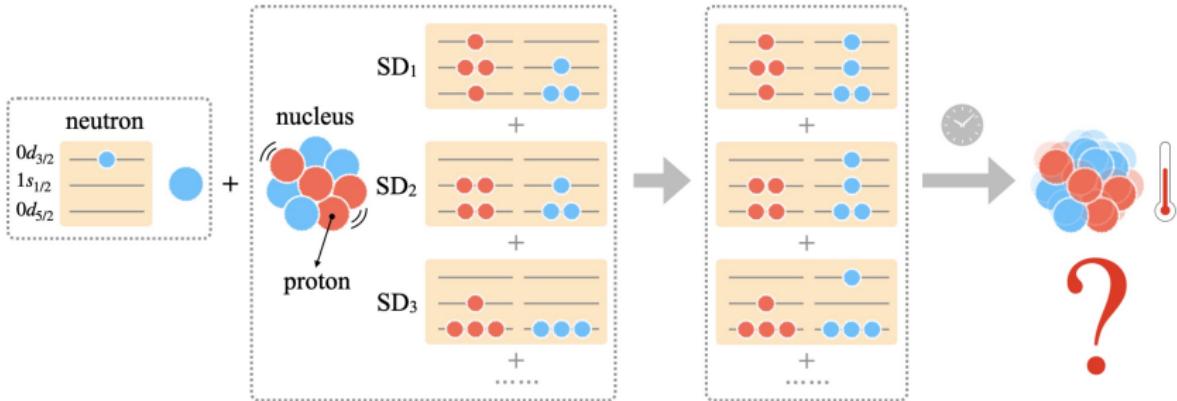
$$N(E_{p'}) dE_{p'} \equiv \sum_{\Delta E_{p'}} \bar{\sigma}_{\alpha, \epsilon'} \\ = \frac{\pi}{k_\alpha^2} \sum_{JI} g_J \left\{ \sum_{sl} T_l(\alpha) \right\} \frac{\sum_{l'} g_{l' J p'} T_{l'}(E_{p'}) \rho(E_{p'}^{\max} - E_{p'}) dE_{p'}}{\sum_{p'' l''} g_{l'' J p''} \int_0^{E_{p''}^{\max}} T_{l''}(E_{p''}) \rho(E_{p''}^{\max} - E_{p''}) dE_{p''}}$$

特定能量区间里不同能级等概率贡献

↓
微正则系综

科学问题：一个多核子系统约束在原子核尺度内，从任意初态出发，相互作用足够长时间，是否一定可以达到热平衡？

基于含时壳模型研究上述问题（玩具模型）



以 $n + {}^{23}\text{Mg}$ 熔合为例，

- “弹核”: 中子处在特定的单粒子轨道上
- “靶核”: ${}^{23}\text{Mg}$ 处在特定的本征态上 (基态或激发态)
- 研究“弹核”与“靶核”“熔合”后复合系统的含时演化; 熔合前, 弹核和靶核之间没有量子纠缠, 含时演化后, 形成了非常复杂的纠缠态; 复合系统始终是纯态, 这个复杂的多体纠缠纯态可以表现出热效应 (用混合态有效描述)。

■ 本征态热化假设 (eigenstate thermalization hypothesis)

为什么某些孤立量子系统可以实现热化? 哪些量子系统可以实现热化?

量子热化: 可观测量时间平均 \approx 热平均

$$\max_{\mathcal{O}_i \in \mathcal{O}} \frac{|\langle \psi(t) | \mathcal{O}_i | \psi(t) \rangle - \langle \mathcal{O}_i \rangle_{\text{mc}}(E)|}{\Delta_{\mathcal{O}_i}} \rightarrow 0 \quad \text{as } \text{Vol}(\mathcal{M}) \rightarrow \infty,$$

$$\langle \mathcal{O} \rangle_{\text{mc}}(E) := \text{tr}(\mathcal{O} \rho_{\text{mc}}(E)), \quad \rho_{\text{mc}}(E) := \sum_{|E_\alpha\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}, E}} \frac{|E_\alpha\rangle \langle E_\alpha|}{D_{\mathcal{M}, E}}.$$

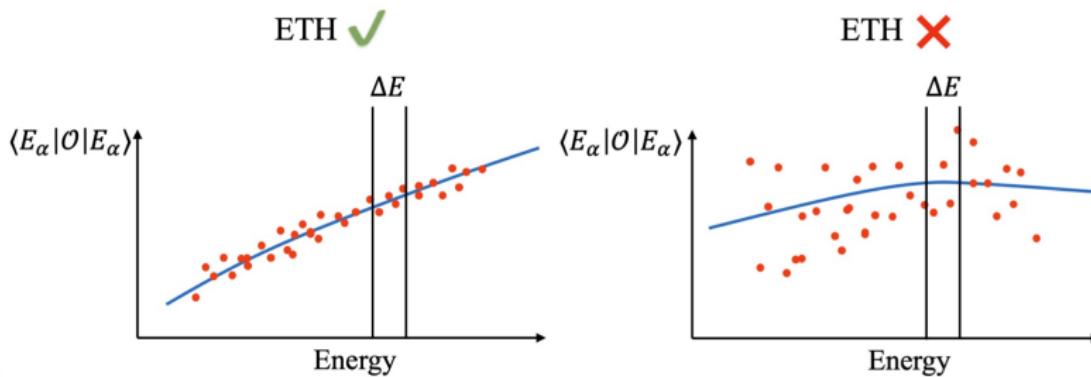
$$\overline{\langle \mathcal{O} \rangle} := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T dt \langle \psi(t) | \mathcal{O} | \psi(t) \rangle$$

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{|E_\alpha\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}, E}} c_\alpha |E_\alpha\rangle, \quad c_\alpha = \langle E_\alpha | \psi(0) \rangle,$$

$$\langle \mathcal{O}(t) \rangle := \overline{\langle \psi(t) | \mathcal{O} | \psi(t) \rangle} = \sum_{\alpha, \beta} c_\alpha^* c_\beta e^{i(E_\alpha - E_\beta)t} \langle E_\alpha | \mathcal{O} | E_\beta \rangle,$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\langle \mathcal{O}(t) \rangle} = \sum_{|E_\alpha\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}, E}} |c_\alpha|^2 \langle E_\alpha | \mathcal{O} | E_\alpha \rangle$$

$$\max_{|E_\alpha\rangle \in \mathcal{H}_{\mathcal{M}}} \frac{|\langle E_\alpha | \mathcal{O}_i | E_\alpha \rangle - \langle \mathcal{O}_i \rangle_{\text{mc}}(E_\alpha)|}{\Delta_{\mathcal{O}_i}} \rightarrow 0 \rightarrow \text{量子热化}$$



本征态热化假设：单个能量本征态自身就已经热化，可观测量的本征态期望值近似等于微正则系综期望值，随能量连续变化。

$n + {}^{49}\text{Ca}$ “熔合”, pf 壳, 分析轨道占据数随时间的变化

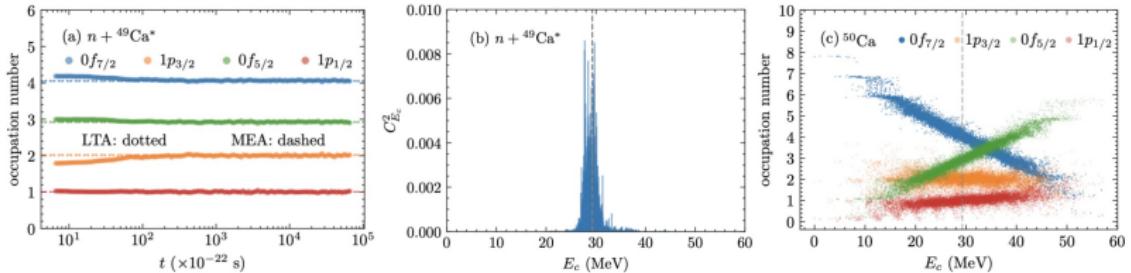


FIG. 2. *The emergence of nucleon thermalization.* (a) The time evolution of the occupation number $n_a(t) = \sum_{m_\alpha} \sum_{m_{T_\alpha}} \langle \psi(t) | \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\alpha | \psi(t) \rangle$ is shown for the four single-particle orbits $0f_{7/2}$ (the blue points), $1p_{3/2}$ (the orange points), $0f_{5/2}$ (the green points), and $1p_{1/2}$ (the red points) in the $n + {}^{49}\text{Ca}^*$ fusion process. For the microcanonical ensemble calculations, we take $\Delta E_c = 0.05 \text{ MeV}$. The long-time averages (LTA, the dotted lines) of $n_a(t)$ agree well with the microcanonical ensemble averages (MEA, the dashed lines), indicating the emergence of nucleon thermalization. (b) The distribution of the coefficient $C_{E_c}^2$ is shown for the $n + {}^{49}\text{Ca}^*$ fusion process, where $C_{E_c}^2$ is peaked around the average energy \bar{E}_c (the gray dashed line). (c) The eigenstate expectation value $n_a(E_c) = \sum_{m_\alpha} \sum_{m_{T_\alpha}} \langle E_c, M_c | \hat{c}_\alpha^\dagger \hat{c}_\alpha | E_c, M_c \rangle$ is shown for the four orbits. For each orbit, $n_a(E_c)$, as a function of E_c , resembles a smooth curve consistent with the ETH.

- 10个中子可以达到热平衡, 10^{-20} s 后轨道占据数 \approx 微正则系综结果, 可以用本征态热化假设理解; ${}^{50}\text{Ca}$ 所有的本征态有相同的同位旋量子数 T 。

$n + ^{23}\text{Mg}$ “熔合”, sd 壳, 有两类不同的同位旋量子数 T 贡献, 同位旋对称性有可能破坏核子热化, 不满足本征态热化假设。

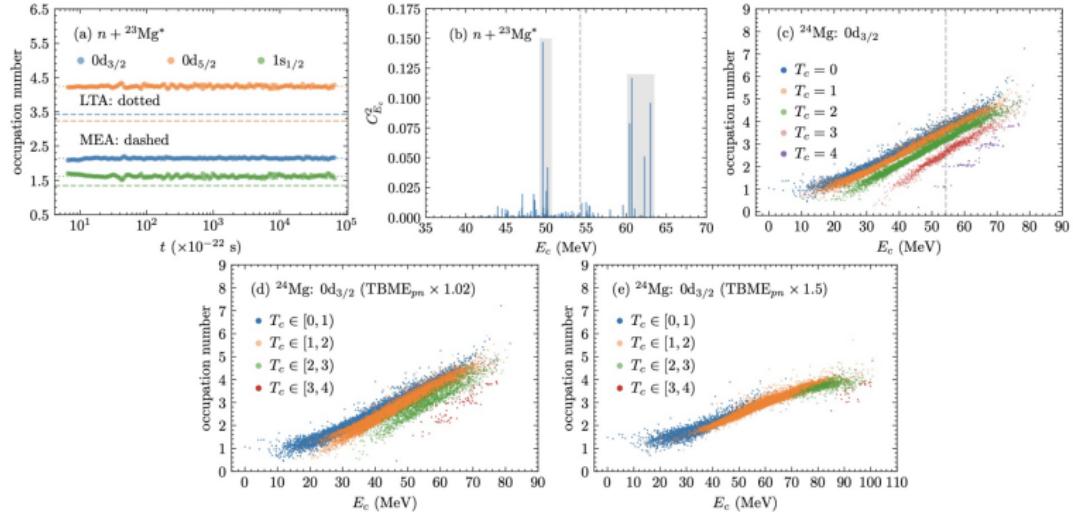


FIG. 3. *The hindrance of nucleon thermalization.* (a) The time evolution of the occupation number $n_a(t)$ is shown for the three single-particle orbits $0d_{3/2}$ (the blue points), $1d_{5/2}$ (the orange points), and $1s_{1/2}$ (the green points) in the $n + ^{23}\text{Mg}^*$ fusion process. To calculate the MEA values, we take $\Delta E_c = 0.1$ MeV. The LTAs (the dotted lines) of $n_a(t)$ deviate significantly with the MEAs (the dashed lines), indicating that the nucleon thermalization gets hindered in this case. (b) The coefficient $C_{E_c}^2$ is shown as a function of the eigenenergy E_c , where two peaks appear on both sides of \bar{E}_c (the gray dashed line). (c) The eigenstate expectation value $n_a(E_c)$ is shown for the $0d_{3/2}$ orbit as a function of the eigenenergy E_c of ^{24}Mg , with data points in different colors according to the T_c value of $|E_c, M_c\rangle$. (d) $n_a(E_c)$ is shown for the $0d_{3/2}$ orbit in the presence of isospin symmetry breaking, where the two-body matrix elements between protons and neutrons (TBME_{pns}) are rescaled by a factor of 1.02 to break the isospin symmetry. The numerical results are colored according to the average isospin T_c of $|E_c, M_c\rangle$. (e) The same as Fig. 3(d) except that the TBME_{pns} are rescaled by a factor of 1.5. As the scaling factor is increased from 1.02 to 1.5, $n_a(E_c)$ is transformed into a smooth function of E_c , resembling a single curve.

