

相对论修正效应对双重夸克偶素产生过程的影响

金小博

北京师范大学

中国科学院理论物理研究所 2024年5月22日

目录

- 1 背景介绍
- 2 相对论修正对双粲夸克偶素强产生过程的影响
- 3 相对论修正对双粲夸克偶素光生过程的影响
- 4 总结

目录

- 1 背景介绍
- 2 相对论修正对双粲夸克偶素强产生过程的影响
- 3 相对论修正对双粲夸克偶素光生过程的影响
- 4 总结

背景介绍

1974 年发现 J/ψ

重夸克偶素的特点:

- 清晰的实验信号
- 简单的结构: 两体问题
- 非相对论体系 $v \ll 1^*$

重夸克偶素中包含多种能标:

- M : 重夸克的质量
- Mv : 重夸克在 J/ψ 静止系中的动量
- Mv^2 : 重夸克在 J/ψ 静止系中的动能
- Λ_{QCD} : QCD 非微扰能标

是研究 QCD 中微扰效应和非微扰效应之间的关联的理想场所。

* v : 重夸克在 J/ψ 静止系中的速度

早期模型

- ① 色单态模型：产生的重夸克对与物理态强子有相同量子数 (保持色单态)

Carlson and Suaya 1976; Chang 1980; S. D. Ellis, Einhorn, and C. Quigg 1976

- 在 P 波衰变的计算中会遇到额外的红外发散
- 实验测到的在大 p_T 下的 J/ψ 和 $\psi(2S)$ 的产率远高于色单态模型理论预言

- ② 色蒸发模型： *Amundson et al. 1996, 1997; Barger, Keung, and Phillips 1980; Fritzsche 1977; Gluck, Owens, and Reya 1978; Halzen 1977*

$$\frac{d\sigma(P)}{d^3P} = F_H \int_{2m_c}^{2M_D} dM \frac{d\sigma_{c\bar{c}}(M, P)}{dM d^3P} \quad (1)$$

- 无法给出重夸克偶素极化的预言
- 色蒸发模型给出的重夸克偶素的产率比是固定的

NRQCD 因子化

NRQCD 因子化公式 *Bodwin, Braaten, and Lepage 1995*

$$d\sigma(A+B \rightarrow J/\psi + X) = \sum_n d\sigma(A+B \rightarrow Q\bar{Q}[n] + X) \langle \mathcal{O}^{J/\psi}[n] \rangle$$

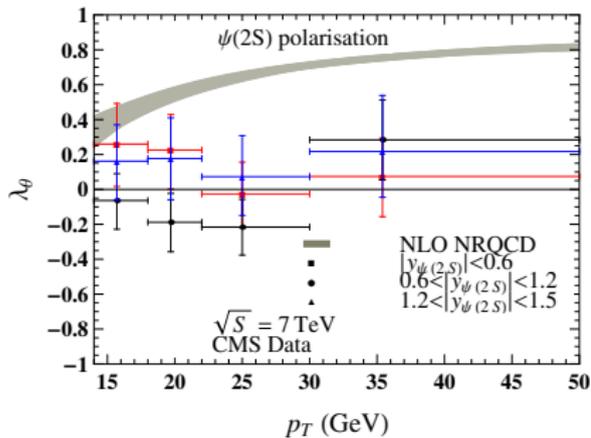
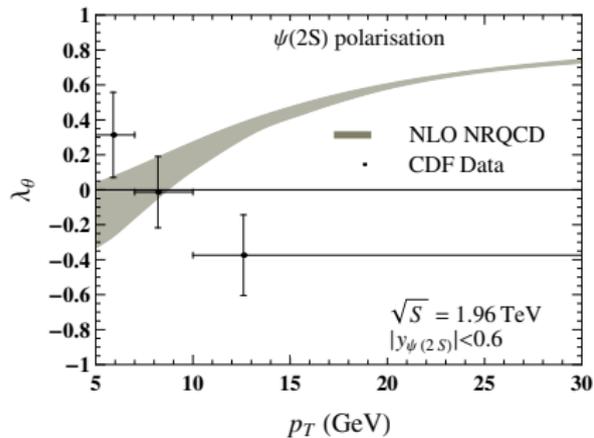
- 速度标度率：可以用 v 来标度场算符和长程矩阵元的大小。
- 长程矩阵元具有普适性。
 - 引入了色八重态机制，解决了色单态模型中遇到的红外发散问题。
 - 解决了强子对撞机上 J/ψ 和 $\psi(2S)$ 的超额产生问题。

NRQCD 面临的困难

- 极化疑难 (polarization puzzle)
- 长程矩阵元的普适性问题 (universality problem)
- 色单态模型给出的 η_c 的产生截面与 LHC 上的实验测量值一致

NRQCD 面临的困难

- $\psi(2S)$ 极化疑难



图片来自 [H. S. Shao et al. 2015](#)

NRQCD 面临的困难

- 长程矩阵元的普适性问题

$$M_k = \langle \mathcal{O}^{J/\psi}(^1S_0^{(8)}) \rangle + k \frac{\langle \mathcal{O}^{J/\psi}(^3P_0^{(8)}) \rangle}{m_c^2} \quad (2)$$

从强子对撞机提取的长程矩阵元

- LO *Krämer 2001*

$$M_{3.5} = (4.54 \pm 1.11) \times 10^{-2} \text{GeV}^3.$$

- NLO *Ma, K. Wang, and Chao 2011*

$$M_{3.9} = (7.4 \pm 1.9) \times 10^{-2} \text{GeV}^3.$$

从 e^+e^- 对撞机提取的长程矩阵元的上限

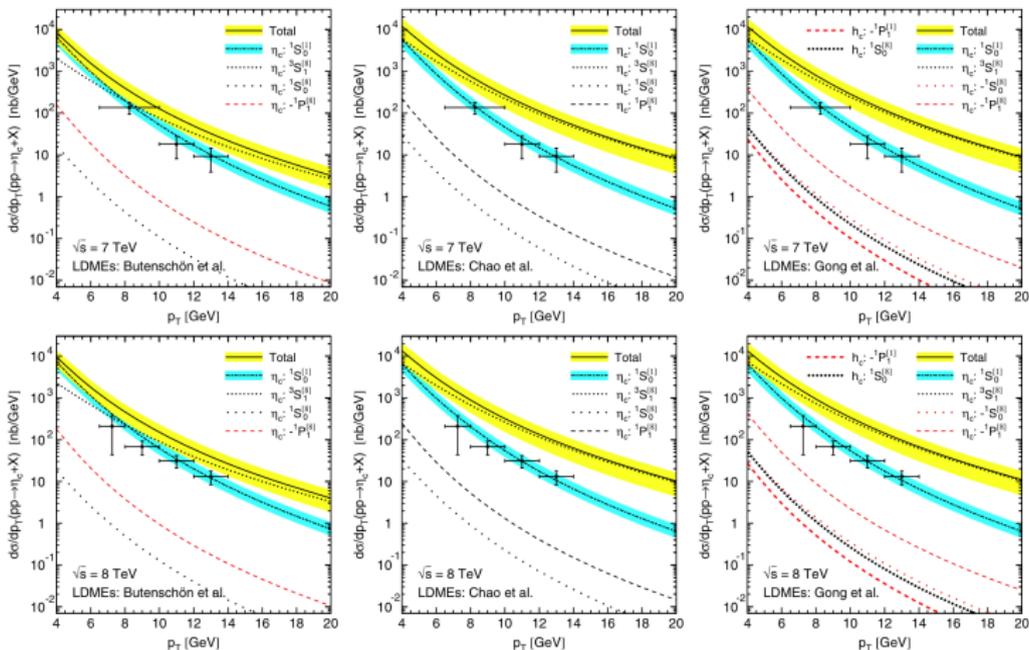
- NLO *Y.-J. Zhang et al. 2010*

$$M_{4.0} < (2.0 \pm 0.6) \times 10^{-2} \text{GeV}^3.$$

NRQCD 面临的困难

- 色单态模型给出的 η_c 的产生截面与 LHC 上的实验测量值一致

Butenschoen, He, and Kniehl 2015; Han et al. 2015; H.-F. Zhang et al. 2015



图片来自 *Butenschoen, He, and Kniehl 2015*

双重夸克偶素产生过程

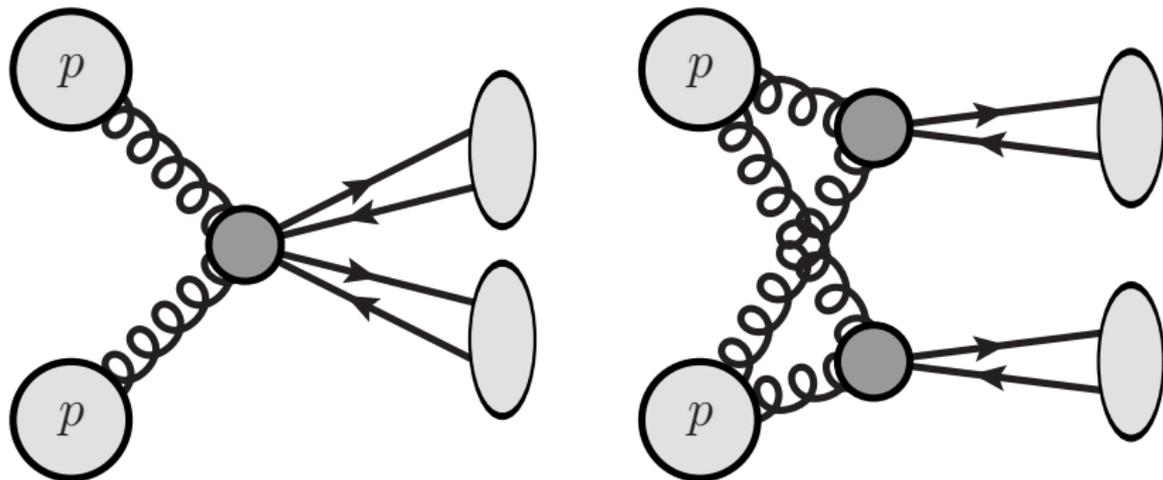
- 文献 *Barger, Fleming, and Phillips 1996* 最先提出通过双重夸克偶素产生过程研究重夸克偶素的产生机制。

双重夸克偶素产生过程的优点

- 在双重夸克偶素的产生过程，重夸克对的强子化过程发生了两次，结果对 QCD 中的非微扰效应非常敏感。
- 对重夸克偶素的长程矩阵元提供了非常重要的约束。
- 既有单部分子散射 (SPS) 的贡献，也有双部分子散射 (DPS) 的贡献。可以抽取 DPS 中的关键参数 σ_{eff} ，并且验证其普适性。 *Kom, A. Kulesza, and Stirling 2011*
- 对研究四夸克态 $X(6900)$ 很有帮助。 *Aad et al. 2023; Roel Aaij et al. 2020; Hayrapetyan et al. 2024*

双重夸克偶素产生过程

- 既有单分子散射 (SPS) 的贡献 (左), 也有双分子散射 (DPS) 的贡献 (右)。



图片来自 *Borschensky and Anna Kulesza 2017*

$$d\sigma_{DPS}^{2J/\psi} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{SPS}^{J/\psi} \sigma_{SPS}^{J/\psi}}{\sigma_{\text{eff}}} \quad (3)$$

历史回顾

双 J/ψ 强产生过程

- 双 J/ψ 强产生过程中 $2(^3S_1^{[8]})$ 道的贡献 *Barger, Fleming, and Phillips 1996*
- 双 J/ψ 强产生过程中 $2(^3S_1^{[1]})$ 道的贡献 *Qiao 2002*
- 双 J/ψ 强产生过程中 α_s^5 的实胶子辐射的效应 *Lansberg and H.-S. Shao 2013*
- 双 J/ψ 强产生过程中 $2(^3S_1^{[1]})$ 道的 QCD 修正 *Sun, Han, and Chao 2016*
- 双 J/ψ 强产生过程完整的 NRQCD 的贡献 *He and Kniehl 2015*
- 用 PRA (parton reggeization approach) 方法对此过程进行了重求和 *He, Kniehl, et al. 2019*
- 双 J/ψ 强产生过程中 $2(^1S_0^{[8]})$ 道的 QCD 修正 *Sun 2023*

$e^+e^- \rightarrow 2\gamma^* \rightarrow 2J/\psi$

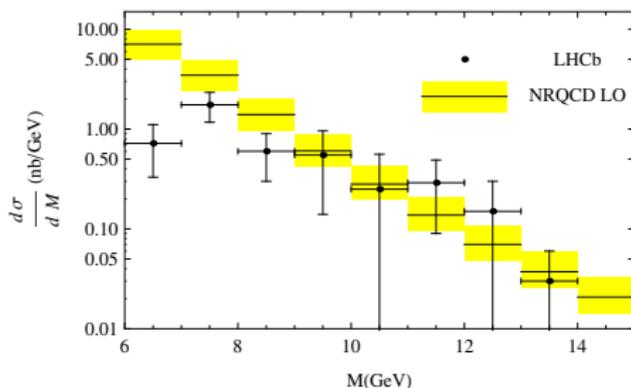
- QCD LO 计算 *Bodwin, Lee, and Braaten 2003*
- QCD NLO 计算 *Gong and J.-X. Wang 2008*
- QCD NNLO 计算 *Huang et al. 2024; Sang et al. 2023*

目录

- 1 背景介绍
- 2 相对论修正对双粲夸克偶素强产生过程的影响
- 3 相对论修正对双粲夸克偶素光生过程的影响
- 4 总结

Prompt 双 J/ψ 强产生过程

PhysRevD 109 (2024) 9, 094013: He, Zhi-Guo and **Jin, Xiao-Bo** and Kniehl, Bernd A.



为什么需要计算相对论修正

- 在双 J/ψ 的产生阈值附近 NRQCD 的计算结果远大于 LHCb 实验组的测量值。 *He and Kniehl 2015*
- 在 relativistic quark model 下得到的双 J/ψ 的强产生截面远远小于 LHCb 实验组的测量值。 *Martynenko and Trunin 2012*
- NRQCD 因子化框架下得到的双 J/ψ 的强产生过程的相对论修正的结果对 m_c 的取值比较敏感。 *Li et al. 2013*

Prompt 双 J/ψ 强产生过程

共线因子化公式 *Collins, Soper, and Sterman 1989*

$$\sigma(A + B \rightarrow 2J/\psi + X) = \sum_{i,j} \int dx_1 dx_2 f_{i/A}(x_1) f_{j/B}(x_2) \hat{\sigma}(i + j \rightarrow 2J/\psi + X), \quad (4)$$

NRQCD 因子化公式 *Bodwin, Braaten, and Lepage 1995*

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(i + j \rightarrow 2J/\psi + X) = & \sum_{m,n,H_1,H_2} \left(\frac{F^{ij}(m,n)}{m_c^{d_{\mathcal{O}(m)}-4} m_c^{d_{\mathcal{O}(n)}-4}} \langle \mathcal{O}^{H_1}(m) \rangle \langle \mathcal{O}^{H_2}(n) \rangle \right. \\ & \left. + \frac{G_1^{ij}(m,n)}{m_c^{d_{\mathcal{P}(m)}-4} m_c^{d_{\mathcal{O}(n)}-4}} \langle \mathcal{P}^{H_1}(m) \rangle \langle \mathcal{O}^{H_2}(n) \rangle + \frac{G_2^{ij}(m,n)}{m_c^{d_{\mathcal{O}(m)}-4} m_c^{d_{\mathcal{P}(n)}-4}} \langle \mathcal{O}^{H_1}(m) \rangle \langle \mathcal{P}^{H_2}(n) \rangle \right) \\ & \times \text{Br}(H_1 \rightarrow J/\psi + X) \text{Br}(H_2 \rightarrow J/\psi + X), \end{aligned} \quad (5)$$

Prompt 双 J/ψ 强产生过程

S 波 4 费米子算符

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^H(^3S_1^{[1]}) &= \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma}^i \psi (a_H^\dagger a_H) \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma}^i \chi, \\ \mathcal{D}^H(^3S_1^{[1]}) &= \chi^\dagger \boldsymbol{\sigma}^i \psi (a_H^\dagger a_H) \psi^\dagger \boldsymbol{\sigma}^i \left(-\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\mathbf{D}}\right)^2 \chi + \text{h.c.},\end{aligned}\quad (6)$$

Matching 微扰 QCD 和 NRQCD

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(g + g \rightarrow (c\bar{c})_1 + (c\bar{c})_2)|_{\text{pert QCD}} \\ = \left[\frac{F(^3S_1^{[1]}, ^3S_1^{[1]})}{m_c^4} \langle 0 | \mathcal{O}^{(c\bar{c})_1} (^3S_1^{[1]}) | 0 \rangle \langle 0 | \mathcal{O}^{(c\bar{c})_2} (^3S_1^{[1]}) | 0 \rangle \right. \\ + \frac{G_1(^3S_1^{[1]}, ^3S_1^{[1]})}{m_c^6} \langle 0 | \mathcal{D}^{(c\bar{c})_1} (^3S_1^{[1]}) | 0 \rangle \langle 0 | \mathcal{O}^{(c\bar{c})_2} (^3S_1^{[1]}) | 0 \rangle \\ \left. + \frac{G_2(^3S_1^{[1]}, ^3S_1^{[1]})}{m_c^6} \langle 0 | \mathcal{O}^{(c\bar{c})_1} (^3S_1^{[1]}) | 0 \rangle \langle 0 | \mathcal{D}^{(c\bar{c})_2} (^3S_1^{[1]}) | 0 \rangle \right]_{\text{pert NRQCD}}.\end{aligned}\quad (7)$$

展开相空间

引入两个新变量 \hat{t} 和 \hat{u}

- 重夸克偶素的不变质量

$$P_i^2 = 4E_{q_i}^2 \equiv m_{H_i}^2, \quad E_{q_i} = \sqrt{\mathbf{q}_i^2 + m_c^2} \quad (8)$$

- Mandelstam 变量

$$t = (k_1 - P_1)^2 = (k_2 - P_2)^2, \quad u = (k_1 - P_2)^2 = (k_2 - P_1)^2, \quad (9)$$

- 新变量

$$\hat{t} \equiv t + \frac{s - m_{H_1}^2 - m_{H_2}^2}{2}, \quad \hat{u} \equiv u + \frac{s - m_{H_1}^2 - m_{H_2}^2}{2}. \quad (10)$$

在非相对论极限 $\mathbf{q}_{1,2}^2 \rightarrow 0$, 有 $t \rightarrow t_0$ 和 $u \rightarrow u_0$

$$\hat{t}_0 \equiv t_0 + \frac{s - 8m_c^2}{2}, \quad \hat{u}_0 \equiv u_0 + \frac{s - 8m_c^2}{2}. \quad (11)$$

展开相空间

变量 \hat{t}, \hat{u} 和 \hat{t}_0, \hat{u}_0 有如下关系

$$\frac{\hat{t}}{\hat{t}_0} = \frac{\hat{u}}{\hat{u}_0} = \sqrt{\frac{\lambda(s, m_{H_1}^2, m_{H_2}^2)}{\lambda(s, 4m_c^2, 4m_c^2)}} \equiv k = \sqrt{1 - \frac{8\mathbf{q}_1^2 + 8\mathbf{q}_2^2}{s - 16m_c^2} + \frac{16(\mathbf{q}_1^2 - \mathbf{q}_2^2)^2}{s(s - 16m_c^2)}}, \quad (12)$$

其中

$$\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac. \quad (13)$$

两体相空间可以表示为

$$d\Phi_2 = \frac{d\hat{t}d\hat{u}}{8\pi s} \delta(\hat{t} + \hat{u}) = k \frac{d\hat{t}_0 d\hat{u}_0}{8\pi s} \delta(\hat{t}_0 + \hat{u}_0) = k d\Phi_{20}. \quad (14)$$

所有对 \mathbf{q}_i^2 的依赖都被因子化到 k 中，相对论展开变得容易。

在阈值附近相对论展开被破坏

合理的展开参数不再是 $v^2 = \mathbf{q}^2/m_c^2$ ，而应该是 $8m_c^2 v^2/(s - 16m_c^2)$ 。

计算中做出的修正

- 采用 J/ψ 和 $\psi(2S)$ 的物理质量进行相空间积分。
- 依照如下关系式，用物理的变量 \hat{t}_p 和 \hat{u}_p 替换矩阵元中的 \hat{t}_0 和 \hat{u}_0 。

$$\frac{\hat{t}_p}{\hat{t}_0} = \frac{\hat{u}_p}{\hat{u}_0} = k, \quad (15)$$

- 保留矩阵元中的 m_c 。

数值输入

LDMEs

- v^2 LO *Eichten and Chris Quigg 1995*

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{O}^{J/\psi}(^3S_1^{[1]}) \rangle &= 1.16 \text{ GeV}^3, \\ \langle \mathcal{O}^{\psi(2S)}(^3S_1^{[1]}) \rangle &= 0.758 \text{ GeV}^3,\end{aligned}\quad (16)$$

- v^2 NLO *Bodwin, Kang, and Lee 2006*

$$\frac{\langle \mathcal{P}^{J/\psi}(^3S_1^{[1]}) \rangle}{\langle \mathcal{O}^{J/\psi}(^3S_1^{[1]}) \rangle} = 0.5 \text{ GeV}^2 \approx \frac{\langle \mathcal{P}^{\psi(2S)}(^3S_1^{[1]}) \rangle}{\langle \mathcal{O}^{\psi(2S)}(^3S_1^{[1]}) \rangle}.\quad (17)$$

其他输入

- CTEQ6L1 LO pdf 和单圈 α_s , $\Lambda_{\text{QCD}}^{(4)} = 215 \text{ MeV}$
- $\mu_r = \mu_f = \xi \left(\sqrt{4M_{H_1}^2 + p_T^2} + \sqrt{4M_{H_2}^2 + p_T^2} \right) / 2$
- $m_{J/\psi} = 3.097 \text{ GeV}$, $m_{\psi(2S)} = 3.686 \text{ GeV}$, $\text{Br}(\psi(2S) \rightarrow J/\psi + X) = 61.4\%$

Workman et al. 2022

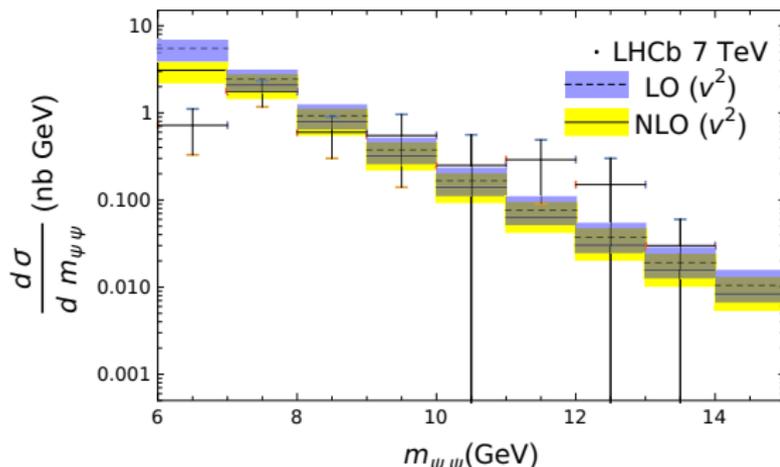
LHCb

$$\sigma_{\text{LHCb}}^{\text{Tot}} = (5.1 \pm 1.0 \pm 1.1) \text{ nb}, \quad (18)$$

NRQCD

$$\sigma_{\text{NRQCD}}^{\text{LO}} = 9.6_{-2.73}^{+2.57} \text{ nb}, \quad \sigma_{\text{NRQCD}}^{\text{NLO}} = 6.55_{-1.89}^{+1.92} \text{ nb}, \quad (19)$$

- $m_{\psi\psi}$ 分布 (相对论修正压低了 45% - 20%)



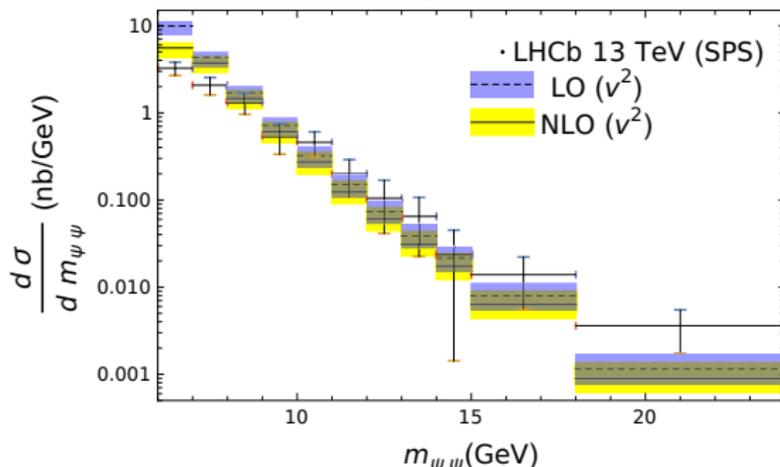
LHCb

$$\sigma_{\text{LHCb}}^{\text{Tot}} = (16.36 \pm 0.28 \pm 0.88) \text{ nb}, \quad \sigma_{\text{LHCb}}^{\text{SPS}} = (7.9 \pm 1.2 \pm 1.1) \text{ nb}, \quad (20)$$

NRQCD

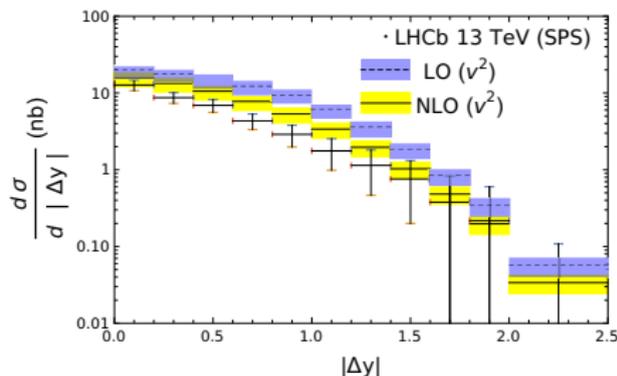
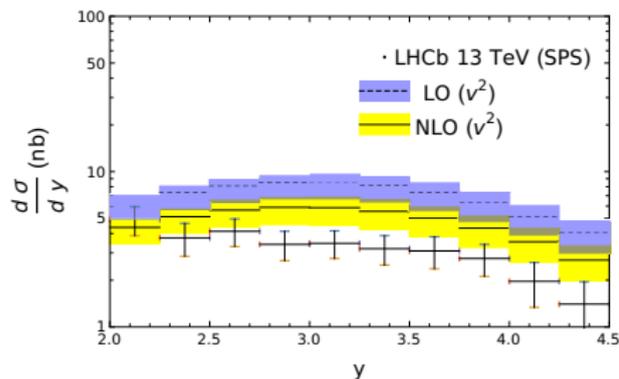
$$\sigma_{\text{NRQCD}}^{\text{LO}} = 17.43_{-3.98}^{+2.44} \text{ nb}, \quad \sigma_{\text{NRQCD}}^{\text{NLO}} = 12.02_{-2.81}^{+1.98} \text{ nb}, \quad (21)$$

- $m_{\psi\psi}$ 分布 (除了最后一个 bin 基本符合, 相对论修正压低了 44% - 20%)



v^2 NLO NRQCD vs. LHCb 13 TeV data

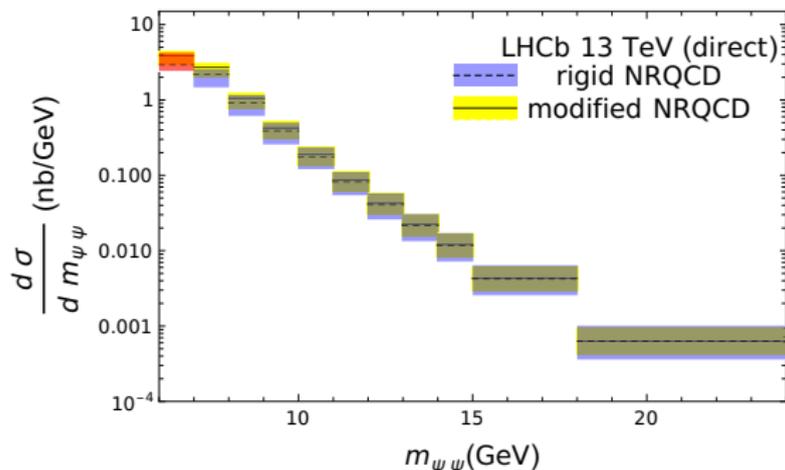
- $y^{J/\psi}$ 和 $|\Delta y|$ 分布在误差之内可以和 LHCb 测量值对上



- 相对论修正使得 $y^{J/\psi}$ 的每个 bin 压低了大概 31%
- 相对论修正对 $|\Delta y|$ 的每个 bin 的压低逐渐增加，第一个 bin 压低了 31%，最后一个 bin 压低了 40%。

Modified NRQCD vs. rigid NRQCD

- 比较 13TeV LHCb 上 direct $2J/\psi$ 产生过程中 modified NRQCD 和 rigid NRQCD 的差别



- 第一个 bin 严格的 NRQCD 结果是负的。
- 随着 $m_{\psi\psi}$ 的增加差异逐渐变小。

目录

- 1 背景介绍
- 2 相对论修正对双粲夸克偶素强产生过程的影响
- 3 相对论修正对双粲夸克偶素光生过程的影响
- 4 总结

Prompt 双 J/ψ 光生过程

2404.08945: He, Zhi-Guo and **Jin, Xiao-Bo** and Kniehl, Bernd A. and Li, Rong

历史回顾

- 在文献 [Qiao 2001](#) 中双 J/ψ 光生过程第一次被计算
- 在文献 [Yang, Z.-Q. Chen, and Qiao 2020](#) 中首次给出双 J/ψ 光生过程的 QCD 修正

正负电子对撞机上双 J/ψ 光生过程的产生截面 [Klasen et al. 2002](#)

$$\begin{aligned} & d\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^- + 2J/\psi + X) \\ = & \sum_{i,j,H_1,H_2} \int dx_1 dx_2 f_\gamma(x_1) f_\gamma(x_2) \int dx_i dx_j f_{i/\gamma}(x_i) f_{j/\gamma}(x_j) \\ & \times d\hat{\sigma}(i + j \rightarrow H_1 + H_2) \text{Br}(H_1 \rightarrow J/\psi + X) \text{Br}(H_2 \rightarrow J/\psi + X), \quad (22) \end{aligned}$$

其中 f_γ 代表正负电子的光子谱， $f_{i/\gamma}$ 代表 resolved 光子对于部分子 i 的 PDF。

Prompt 双 J/ψ 光生过程

single 和 double resolved 的贡献可以忽略，仅需考虑 direct 过程

- $\sqrt{S} = 92\text{GeV}$: CEPC 和 FCC-ee
- $\sqrt{S} = 3\text{TeV}$: CLIC
- 在 $\sqrt{S} < 3\text{TeV}$ 的情况下 single 和 double resolved 的贡献非常小

direct 过程中 CO 道的贡献可以忽略

- 由于颜色守恒，CO 道在 α_s 的高阶才会出现

$$\gamma + \gamma \rightarrow (c\bar{c})_1({}^3S_1^{[1]}) + (c\bar{c})_2({}^3S_1^{[1]}), \quad (23)$$

$$\gamma + \gamma \rightarrow (c\bar{c})_1({}^3P_{J_1}^{[1]}) + (c\bar{c})_2({}^3P_{J_2}^{[1]}), \quad (24)$$

CS 道中 P 波末态可以被忽略

- P 波末态的短程系数比 S 波末态小一个数量级。
- $\text{Br}(\chi_c \rightarrow J/\psi + X)$ 较小，进一步压低 P 波的贡献

Prompt 双 J/ψ 光生过程

正负电子对撞上光子来源

- 轫致辐射 (Bremsstrahlung)
- 束流辐射 (Beamstrahlung)

Bremsstrahlung (WWA 近似) *Frixione et al. 1993*

$$f_{\gamma}^{\text{WWA}}(x) = \frac{\alpha}{2\pi} \left[\frac{1 + (1-x)^2}{x} \ln \frac{Q_{\max}^2}{Q_{\min}^2} + 2m_e^2 x \left(\frac{1}{Q_{\max}^2} - \frac{1}{Q_{\min}^2} \right) \right], \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} Q_{\min}^2 &= \frac{m_e^2 x^2}{1-x}, \\ Q_{\max}^2 &= E_e^2 \theta_c^2 (1-x) + Q_{\min}^2, \end{aligned} \quad (26)$$

Prompt 双 J/ψ 光生过程

Beamstrahlung *P. Chen 1992*

$$f_{\gamma}^{\text{beam}}(x) = \frac{1}{\Gamma(1/3)} \left(\frac{2}{3\Upsilon} \right)^{1/3} x^{-2/3} (1-x)^{-1/3} e^{-2x/[3\Upsilon(1-x)]} \\ \times \left\{ \frac{1 - \sqrt{\Upsilon/24}}{g(x)} \left[1 - \frac{1}{g(x)N_{\gamma}} \right] \left(1 - e^{-g(x)N_{\gamma}} \right) + \sqrt{\frac{\Upsilon}{24}} \left[1 - \frac{1}{N_{\gamma}} \left(1 - e^{-N_{\gamma}} \right) \right] \right\}, \quad (27)$$

其中

$$g(x) = 1 - \frac{1}{2} \left[(1+x)\sqrt{1+\Upsilon^{2/3}} + 1-x \right] (1-x)^{2/3}, \quad (28)$$

$$N_{\gamma} = \frac{5\alpha\sigma_z m_e^2 \Upsilon}{2E_e \sqrt{1+\Upsilon^{2/3}}} \quad (29)$$

QCD 修正

生成 Feynman 振幅

- QGRAF 生成 feynman 图 *Nogueira 1993*
- FORM 操作 Dirac 和 $SU(3)_c$ 代数 *Vermaseren 2000*

部分分式分解 (Apart): $\sum_i a_i I_i$

- 由于 feynman 图中不同外腿之间的动量不独立, 导致传播子之间存在线性关系, 需要通过 Apart 使传播子分母线性独立。

IBP 约化: $\sum_j c_j M I_j$

- Reduze 2 和 FIRE 6 *Manteuffel and Studerus 2012; Smirnov and Chuharev 2020*

计算主积分

- 通过 QCDloop 和 Package-X 2.0 得到解析表达式
R. K. Ellis and Zanderighi 2008; Patel 2017
- 计算结果于文献 *Yang, Z.-Q. Chen, and Qiao 2020* 中数值结果一致

数值数入

- 正负电子对撞机参数 [Workman et al. 2022](#)

facility	\sqrt{S} [GeV]	θ_c [mrad]	average Υ	σ_z [mm]	$\int dt \mathcal{L}$ [ab $^{-1}$]
FCC-ee	92	30	10^{-4}	15.5	17
CEPC	92	33	2×10^{-4}	8.7	15
CLIC	3,000	20	5	0.044	0.6

- $\mu_r = \xi \sqrt{s}$
- $p_T^{J/\psi} \geq 2 \text{ GeV}$
- 其他参数于强产生过程一致

NRQCD 计算结果 (NLO α_s 和 NLO v^2)

- 总截面

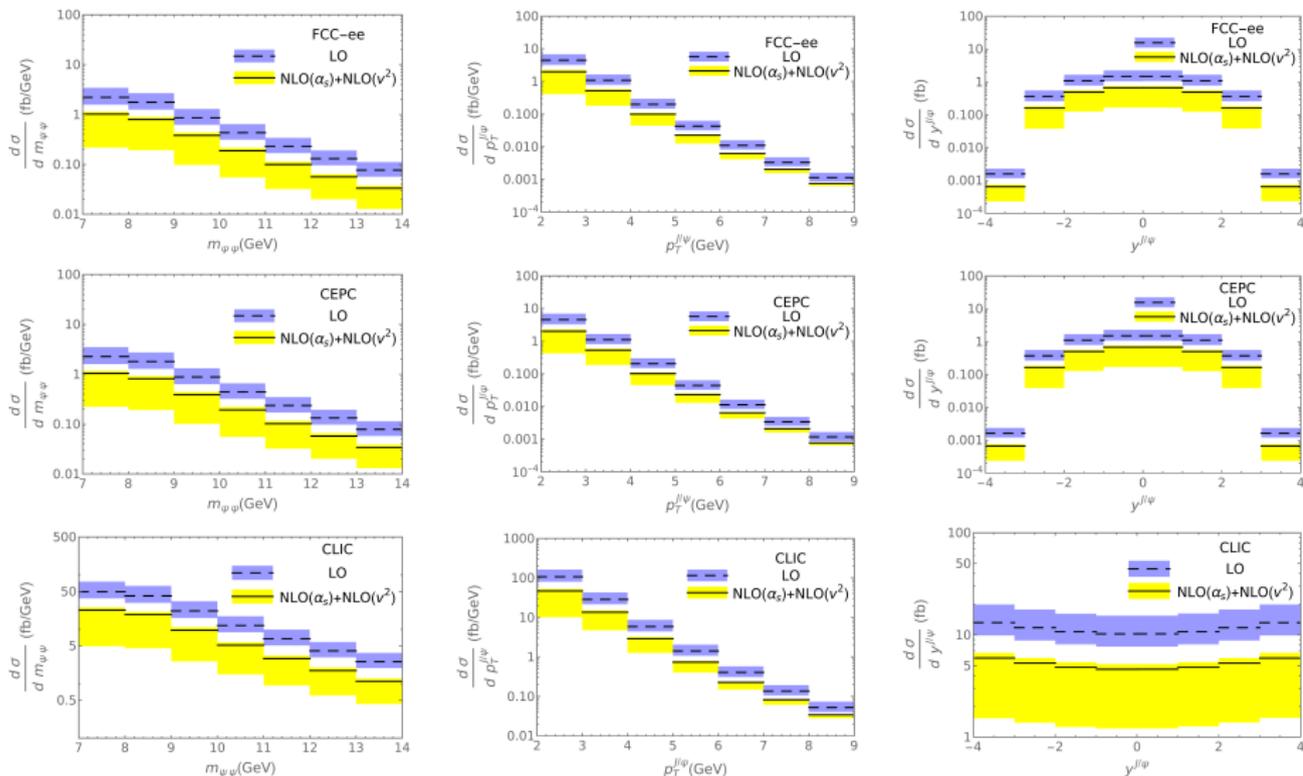
order	FCC-ee	CEPC	CLIC
LO (fb)	$5.88^{+2.99}_{-1.70}$	$6.00^{+3.06}_{-1.73}$	144^{+73}_{-36}
plus $\mathcal{O}(v^2)$ (fb)	$5.17^{+2.64}_{-1.49}$	$5.28^{+2.69}_{-1.53}$	126^{+64}_{-32}
plus $\mathcal{O}(\alpha_s)$ (fb)	$2.65^{+0.34}_{-1.99}$	$2.71^{+0.34}_{-2.03}$	$64.6^{+7.5}_{-47.9}$
only plus $\mathcal{O}(\alpha_s)$ (fb)	$3.21^{+0.18}_{-1.71}$	$3.28^{+0.18}_{-1.75}$	$78.9^{+3.9}_{-40.9}$
# of l^+l^- (个)	649^{+82}_{-488}	584^{+75}_{-439}	558^{+64}_{-414}

Beamstrahlung 的贡献

- 在 FCC-ee 和 CEPC 的实验条件下可以忽略
- 使得 CLIC 的理论预言提高到之前的 2.6 倍
- 在 α_s LO, 相对论修正使得截面压低了 12%。在 α_s NLO, 相对论修正使得截面压低了 $17^{+39}_{-6}\%$ 。

NRQCD 计算结果 (NLO α_s 和 NLO v^2)

- $m_{\psi\psi}$ (左), $p_T^{J/\psi}$ (中), 和 $y^{J/\psi}$ (右) 的分布



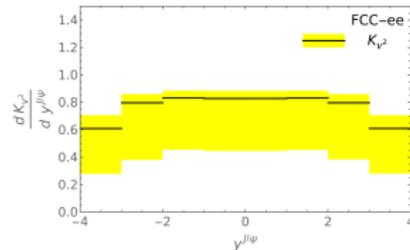
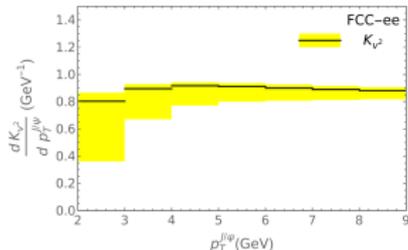
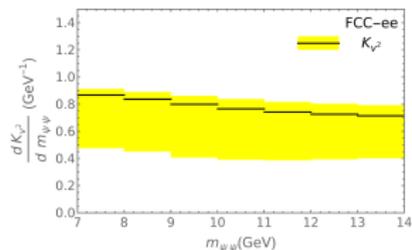
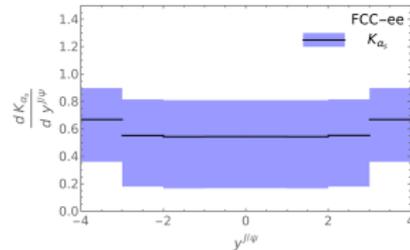
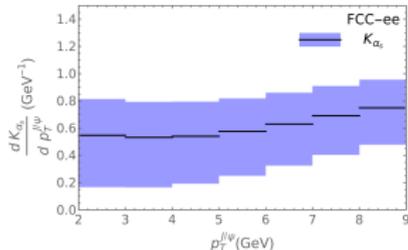
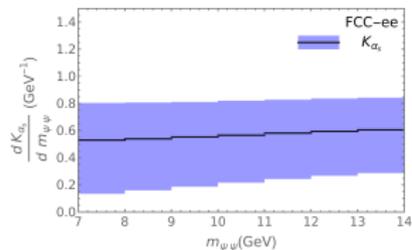
NRQCD 计算结果 (NLO α_s 和 NLO v^2)

每个 bin 可以观测到的事例数

bin	1	2	3	4	5	6
$m_{\psi\psi}$	250^{+30}_{-197}	195^{+25}_{-148}	$93.5^{+12.4}_{-70.0}$	$46.1^{+6.5}_{-32.9}$	$24.4^{+3.4}_{-16.7}$	$13.8^{+1.9}_{-8.9}$
p_T	486^{+66}_{-386}	128^{+14}_{-83}	$24.4^{+2.3}_{-13.7}$	$5.56^{+0.38}_{-2.49}$	$1.53^{+0.07}_{-0.52}$	$0.501^{+0.010}_{-0.124}$
y	$0.159^{+0.023}_{-0.102}$	$39.4^{+5.3}_{-30.2}$	121^{+15}_{-90}	164^{+21}_{-123}		
$m_{\psi\psi}$	225^{+27}_{-177}	176^{+23}_{-134}	$84.2^{+11.0}_{-62.3}$	$41.6^{+5.8}_{-29.6}$	$22.0^{+3.1}_{-15.0}$	$12.4^{+1.7}_{-8.1}$
p_T	438^{+59}_{-347}	115^{+13}_{-75}	$22.0^{+2.1}_{-12.3}$	$5.01^{+0.35}_{-2.25}$	$1.38^{+0.06}_{-0.47}$	$0.452^{+0.010}_{-0.112}$
y	$0.144^{+0.021}_{-0.093}$	$35.5^{+4.8}_{-27.2}$	109^{+14}_{-81}	147^{+19}_{-110}		
$m_{\psi\psi}$	197^{+22}_{-154}	162^{+20}_{-123}	$83.8^{+10.7}_{-61.6}$	$44.4^{+5.8}_{-31.5}$	$25.2^{+3.3}_{-17.2}$	$15.1^{+2.0}_{-9.9}$
p_T	407^{+50}_{-319}	118^{+13}_{-77}	$25.2^{+2.4}_{-14.2}$	$6.39^{+0.46}_{-2.95}$	$1.97^{+0.08}_{-0.69}$	$0.718^{+0.016}_{-0.184}$
y	$51.5^{+6.2}_{-38.3}$	$45.9^{+5.5}_{-34.0}$	$41.9^{+5.0}_{-31.0}$	$39.9^{+4.8}_{-29.4}$		

NRQCD 计算结果 (NLO α_s 和 NLO v^2)

- $K_{\alpha_s} = d\sigma^{\mathcal{O}(\alpha_s)}/d\sigma^{\text{LO}}$, $K_{v^2} = d\sigma^{\mathcal{O}(\alpha_s, v^2)}/d\sigma^{\mathcal{O}(\alpha_s)}$
- 三个实验的 K_{α_s}, K_{v^2} 是相似的, 因此我们只展示 FCC-ee 的情况。
- $m_{\psi\psi}$ (左), $p_T^{J/\psi}$ (中), 和 $y^{J/\psi}$ (右) 的 K_{α_s} (上) 和 K_{v^2} (下) 分布



NRQCD 计算结果 (NLO α_s 和 NLO v^2)

- 在 QCD 的 NLO, 由 μ_r 的选取带来的绝对误差减小。
- 选取不同的 μ_r 的中心值, 结果会有较大差异。在此处我们列出 FCC-ee 上选取 $\mu_r = \xi m_T$ 的 $p_T^{J/\psi}$ 分布 (单位 [fb/GeV]), 其中 $m_T = \sqrt{p_T^{J/\psi^2} + 4m_c^2}$ 。

bin	1	2	3	4	5	6	7
$\xi = 1/2$	-9.42	-1.90	-0.272	-0.0430	-0.00726	-0.00120	-0.000124
$\xi = 1$	-0.162	0.0673	0.0270	0.00974	0.00370	0.00148	0.000620
$\xi = 2$	1.81	0.519	0.0100	0.023	0.00647	0.00213	0.000790

NLO 的 QCD 修正是负数, 它的绝对值会随着 μ_r 的减小而快速增加, 导致给出非物理的理论预言

目录

- 1 背景介绍
- 2 相对论修正对双粲夸克偶素强产生过程的影响
- 3 相对论修正对双粲夸克偶素光生过程的影响
- 4 总结

总结

总结

- 相对论修正对于双重夸克偶素产生过程在阈值附近的理论预言是十分重要的。
- 在双重夸克偶素的强产生过程的大不变质量区域理论仍然不能解释实验。
- 对于双重夸克偶素光生过程，NLO 的相对论修正和 QCD 修正都是负的。
- 得益于未来的正负电子对撞机的高亮度，我们依然有希望在 FCC-ee，CEPC 和 CLIC 上观测到双 J/ψ 的产生过程。

backup (自旋投影方法)

双 ${}^3S_1^{[1]}$ 产生的 QCD 振幅

$$\mathcal{M}(g+g \rightarrow (c\bar{c})_1({}^3S_1^{[1]}) + (c\bar{c})_2({}^3S_1^{[1]})) = \sqrt{\frac{m_c}{E_{q_1}}} \sqrt{\frac{m_c}{E_{q_2}}} A(q_1, q_2), \quad (30)$$

其中

$$p_{c_i} = \frac{P_i}{2} + q_i, \quad p_{\bar{c}_i} = \frac{P_i}{2} - q_i, \quad E_q = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m_c^2}. \quad (31)$$

$$\begin{aligned} A(q_1, q_2) = & \sum_{\lambda_i \bar{\lambda}_i k_i l_i} \langle \frac{1}{2}, \lambda_1; \frac{1}{2}, \bar{\lambda}_1 | 1, S_{1z} \rangle \langle 3, k_1; \bar{3}, l_1 | 1 \rangle \\ & \times \langle \frac{1}{2}, \lambda_2; \frac{1}{2}, \bar{\lambda}_2 | 1, S_{2z} \rangle \langle 3, k_2; \bar{3}, l_2 | 1 \rangle \\ & \times \mathcal{A}(g+g \rightarrow c_{\lambda_1, k_1}(p_{c_1}) + \bar{c}_{\bar{\lambda}_1, l_1}(p_{\bar{c}_1}) + c_{\lambda_2, k_2}(p_{c_2}) + \bar{c}_{\bar{\lambda}_2, l_2}(p_{\bar{c}_2})). \end{aligned} \quad (32)$$

backup (Rigid NRQCD 计算)

matching 得到的短程系数

$$\begin{aligned}\frac{F({}^3S_1^{[1]}, {}^3S_1^{[1]})}{m_c^4} &= \frac{1}{2s} \int d\Phi_{20} |M|^2, \\ \frac{G_1({}^3S_1^{[1]}, {}^3S_1^{[1]})}{m_c^6} &= \frac{G_2({}^3S_1^{[1]}, {}^3S_1^{[1]})}{m_c^6} = \frac{1}{2s} \int d\Phi_{20} (K|M|^2 + |N|^2),\end{aligned}\quad (33)$$

其中

$$\begin{aligned}|M|^2 &= \overline{\sum} |A(0,0)|^2 \Big|_{\mathbf{q}_1^2 = \mathbf{q}_2^2 = 0}, \\ |N|^2 &= \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_1^2} \left(\frac{m_c}{E_{q_1}} \overline{\sum} |A(0,0)|^2 \right) + \frac{1}{3} \overline{\sum} |\Pi_1^{\alpha_1 \alpha_2} \text{Re} [A^*(0,0) A_{\alpha_1 \alpha_2, 0}] \right] \Big|_{\mathbf{q}_1^2 = \mathbf{q}_2^2 = 0}, \\ K &= -\frac{4}{(s - 16m_c^2)},\end{aligned}\quad (34)$$