

Revisiting $\mathcal{O}(N)$ σ model at unphysical pion masses and high temperatures

李衡智

四川大学

2024 年 4 月 28 日

合作者：吕源林 (北京大学)
合作导师：郑汉青

目录

- ① 背景
- ② $\mathcal{O}(N)$ 线性 σ 模型简介
- ③ σ 随 m_π 的跑动轨迹
 - $\mathcal{O}(N)$ 领头阶
 - $\mathcal{O}(N)$ 线性 σ 模型 + N/D 方法
- ④ 有限温中 σ 共振极点的跑动轨迹
- ⑤ 总结

背景

- 手征对称性自发破缺在 QCD 低能动力学有着重要作用。
- QCD 的手征对称性 $SU(2)_L \times SU(2)_R$ 自发破缺成 $SU(2)_V$, 产生三个 Goldstone π 介子。
- 1960, Gell-Mann 和 Levy 首次提出一个模型—线性 σ 模型来描述 QCD 的这种性质, 除了三个 π 介子, 该模型还引入了一个 σ 粒子[M. Gell-Mann and M. Levy, 1960]。
- 手征对称性的另一种实现是后来被称为手征微扰场论 (χPT [J. Gasser and H. Leutwyler, 1984, 1985]) 的有效理论, 在该理论中, 并不需要 σ 粒子。
- 随着能量的增大, χPT 失效, 此时需要做么正化。而么正化以后, $\pi\pi$ 的散射振幅便动力学产生了一对共振态, 即 $f_0(500)$ [J. R. Pelaez, 2004]。
- PKU 表示[Z. Xiao and H. Q. Zheng, 2001]以及同时满足么正性、解析性和交叉对称性的 Roy 方程[S. M. Roy, 1971]都证明了 $f_0(500)$ 共振态的存在性[I. Caprini, G. Colangelo, etc., 2006], 并给出了其位置。。
- $f_0(500)$ 与线性 σ 模型中 σ 的关系, χPT 并不能告诉我们。而 $\mathcal{O}(N)$ 线性 σ 模型, 当 $N \rightarrow \infty$ 时, 是可解的, 因此该模型可能可以回答它们之间的关系。

- 格点 QCD 的快速发展, 让我们能够在不同 π 质量下计算 $\pi\pi$ 散射的相移。
- 用 K 矩阵分析 $m_\pi = 391\text{MeV}$ $\pi\pi$ 散射振幅, 发现 $f_0(500)$ 已成为了一个束缚态, 而 $m_\pi = 236\text{MeV}$ 时还是一个共振态[R. A. Briceno, J. J. Dudek, etc., 2017]。
- PKU 表示结合 BNR 关系也表明当 $m_\pi = 391\text{MeV}$, $f_0(500)$ 是一个束缚态[X.-L. Gao, Z.-H. Guo, etc., 2022]。
- 最严格的 Roy 方程结合格点数据, 以一种模型无关的方式证明了, 当 $m_\pi = 391\text{MeV}$, 不仅 $f_0(500)$ 是一个束缚态, 该道的散射振幅还存在一对共振态[X.-H. Cao, QZL, etc., 2023]。

$\mathcal{O}(N)$ 线性 σ 模型简介

- $\mathcal{O}(N)$ 线性- σ 模型拉氏量:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a - \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi_a \phi_a - \frac{\lambda_0}{8N} (\phi_a \phi_a)^2 + \alpha \phi_N \quad a = 1, \dots, N \quad (1)$$

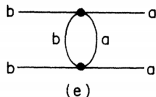
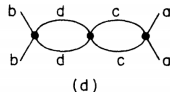
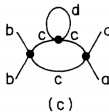
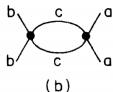
- $\mu_0^2 < 0$: 对称性自发破缺, $\mathcal{O}(N) \rightarrow \mathcal{O}(N-1)$, $\langle \phi \rangle = \langle \phi_N \rangle = v \neq 0$.
- $N-1$ 个赝标 Goldstone 粒子: π^a , $a = 1, \dots, N-1$.
- α : 显式破缺项, 给 π^a 粒子提供质量。

在非破缺相计算粒子 a 与 b 的散射过程

- (a): $1/N$ 阶;
- (b), (c), (d): $1/N$ 阶 顶角 $(1/N) \times N$ 个粒

子求和

- (e): $1/N^2$



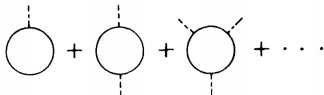
特别地, (b), (e) 的拓扑结构一样。

为了更方便的计算 $1/N$ 领头阶, 引入辅助场 χ [S. R. Coleman, 1974] :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L} + \frac{N}{2\lambda_0} \left(\chi - \frac{\lambda_0}{2N} \phi_a \phi_a - \mu_0^2 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a + \alpha \phi_N + \frac{N}{2\lambda_0} \chi^2 - \frac{1}{2} \chi \phi_a \phi_a - \frac{N\mu_0^2}{\lambda_0} \chi\end{aligned}\quad (2)$$

- 完全平方项, 生成泛函仅贡献一个高斯因子。
- 消除了 ϕ^4 自相互作用项和质量项 ϕ^2 。
- χ 的传播子为 $\mathcal{O}(1/N)$ 。

n 点正规顶角的生成泛函—有效作用量:



$$\begin{aligned}\Gamma(\phi, \chi) &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a + \alpha \phi_N + \frac{N}{2\lambda_0} \chi^2 - \frac{1}{2} \chi \phi_a \phi_a - \frac{N\mu_0^2}{\lambda_0} \chi \right) \\ &\quad + \frac{i}{2} N \text{Tr} \log(\partial^2 + \chi - i\epsilon)\end{aligned}\quad (3)$$

- 当 ϕ, χ 与时空无关时, 有效作用量退化到 $-V(\phi, \chi)$, 这里的 V 代表有效势:

$$V(\phi, \chi) = -\alpha\phi_N - \frac{N}{2\lambda_0}\chi^2 + \frac{1}{2}\chi\phi_a\phi_a + \frac{N\mu_0^2}{\lambda_0}\chi - \frac{i}{2}N \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \log(-l^2 + \chi - i\epsilon). \quad (4)$$

- 重整化条件:

$$\frac{\mu(M)^2}{\lambda(M)} = \frac{\mu_0^2}{\lambda_0} + \frac{i}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{l^2 + i\epsilon} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\lambda(M)} = \frac{1}{\lambda_0} - \frac{i}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 + i\epsilon)(l^2 - M^2 + i\epsilon)}. \quad (6)$$

有效势的最小值给出场的真空期望值:

- $\frac{\partial V}{\partial \chi} = 0$:

$$\phi_a\phi_a = \frac{2N}{\lambda}\chi - \frac{2N\mu^2}{\lambda} - \frac{N}{16\pi^2}\chi \log \frac{\chi}{M^2} \quad (7)$$

- $\frac{\partial V}{\partial \phi_a} = 0$:

$$\chi\phi_a = 0 \quad (a < N), \quad \chi\phi_N - \alpha = 0 \quad (8)$$

$$* \quad \langle \pi_a \rangle = 0, \quad \langle \phi_N \rangle = v = \alpha / \langle \chi \rangle, \quad \langle \chi \rangle = m_\pi^2$$

$$* \quad f_\pi \text{ 的定义: } \langle 0 | A_a^\mu(x) | \pi \rangle = i p^\mu f_\pi e^{-ip \cdot x}$$

$$* \quad \text{PCAC: } \partial_\mu A_a^\mu(x) = \alpha \pi_a \Rightarrow v = f_\pi$$

- 对场做如下平移：

$$\sigma = \phi_N - v, \quad \tau = \chi - m_\pi^2 \quad (9)$$

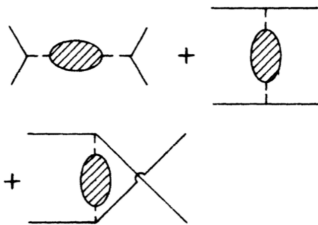
- 新场的有效作用量：

$$\begin{aligned} \Gamma(\pi, \sigma, \tau) = \int d^4x & \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \pi_a \partial^\mu \pi_a + \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - \frac{1}{2} m_\pi^2 (\pi_a \pi_a + \sigma^2) + \frac{N}{2\lambda_0} \tau^2 \right. \\ & - \frac{1}{2} \tau \pi_a \pi_a - \frac{1}{2} \tau \sigma^2 - v \tau \sigma + \left[\frac{N}{\lambda_0} m_\pi^2 - \frac{1}{2} v^2 - \frac{N \mu_0^2}{\lambda_0} \right] \tau \Big) \\ & + \frac{i}{2} N \text{Tr} \log (\partial^2 + m_\pi^2 + \tau - i\epsilon) \end{aligned} \quad (10)$$

- π 场只与 τ 场有耦合： $\frac{1}{2} \tau \pi_a \pi_a$

- σ 场与 τ 场有混合： $v \tau \sigma$

考虑 $\pi\pi$ 弹性散射过程：



$$T_{\pi_a \pi_b \rightarrow \pi_c \pi_d} = iD_{\tau\tau}(s)\delta_{ab}\delta_{cd} + iD_{\tau\tau}(t)\delta_{ac}\delta_{bd} + iD_{\tau\tau}(u)\delta_{ad}\delta_{bc} \quad (11)$$

- $D_{\tau\tau}$ 为 τ 场的传播子。
- 由于 τ, σ 场之间的混合，我们需要考虑一个 2×2 的矩阵：

$$D^{-1}(p^2) = -i \begin{pmatrix} p^2 - m_\pi^2 & -f_\pi \\ -f_\pi & N/\lambda_0 + NB_0(p^2, m_\pi) \end{pmatrix}_{\sigma\tau} \quad (12)$$

$$B_0(p^2, m_\pi) = \frac{-i}{2} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - m_\pi^2 + i\epsilon)((l+p)^2 - m_\pi^2 + i\epsilon)} \quad (13)$$

- τ 场的传播子：

$$D_{\tau\tau}(p^2) = \frac{i(p^2 - m_\pi^2)}{(p^2 - m_\pi^2)(N/\lambda_0 + NB_0(p^2, m_\pi)) - f_\pi^2} \quad (14)$$

- σ 场的传播子

$$D_{\sigma\sigma}(p^2) = \frac{i(1/\lambda_0 + B_0(p^2, m_\pi))}{(p^2 - m_\pi^2)(1/\lambda_0 + B_0(p^2, m_\pi)) - f_\pi^2/N} \quad (15)$$

- 重整化

$$\frac{1}{\lambda(M)} + B(p^2, m_\pi, M) = \frac{1}{\lambda_0} + B_0(p^2, m_\pi) \quad (16)$$

- 定义重整化标度 M ，使得 $1/\lambda(M) = 0$ ， $\lambda(M) \rightarrow \infty$ 。

$$B(s, m_\pi, M) = \frac{1}{32\pi^2} \left(1 + \rho(s) \log \frac{\rho(s) - 1}{\rho(s) + 1} - \log \frac{m_\pi^2}{M^2} \right), \quad \rho(s) = \sqrt{(s - 4m_\pi^2)/s} \quad (17)$$

$I = 0, J = 0$ 散射道振幅[R. S. Chivukula, 1991]:

$$T_{00}(s) = \frac{iND_{\tau\tau}(s)}{32\pi} = -\frac{1}{32\pi} \frac{s - m_\pi^2}{(s - m_\pi^2) B(s, m_\pi, M) - f_\pi^2/N} \quad (18)$$

- t -道与 u -道为 $1/N$ 阶。
- 没有交叉对称性。
- 满足么正性条件:

$$\text{Im } T_{00}(s) = \rho(s) |T_{00}(s)|^2 \quad (19)$$

- Alder zero: $s = m_\pi^2$
- σ 共振态的位置, 即 $S = 1 + 2i\rho T$ 矩阵在 I 叶的零点:

$$(s - m_\pi^2) B^{II}(s, m_\pi, M) - f_\pi^2/N = 0, \quad (20)$$

$$B^{II}(s, m_\pi, M) \equiv B(s, m_\pi, M) - i\rho(s/(16\pi)), \quad (21)$$

当 m_π 增大时, 共振态极点会逐渐跑到阈下实轴上成为两个虚态, 然后一个虚态往右跑, 最终在当 $m_\pi = m_c$ 时, 越过割线跑到第 I 叶上, 变成束缚态, 其中:

$$\log \frac{m_c^2}{M^2} = 1 - \frac{32\pi^2 f_\pi^2}{3m_c^2 N} \quad (22)$$

- $m_c \simeq 242\text{MeV}$ 。

$\mathcal{O}(N)$ 领头阶

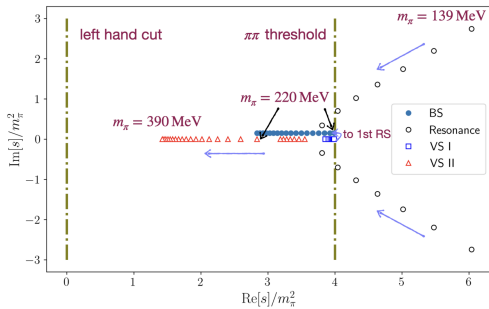
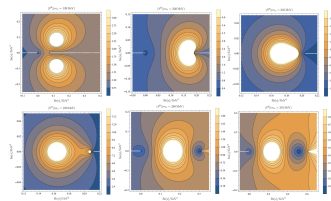
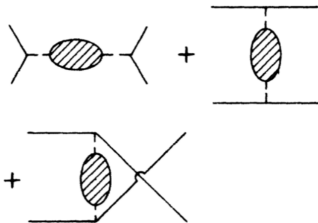


表: $m_\pi \simeq 390\text{MeV}$, σ 是一个束缚态

	$\mathcal{O}(N)\text{LO}$	Roy 方程
左手割线位置	$(-\infty, 0)$	$(-\infty, 4m_\pi^2 - m_\sigma^2)$
Adler zero	m_π , 实轴上	$206_{-18}^{+29} \pm i(225_{-18}^{+3})\text{MeV}$, 复平面上
阈下共振态	不存在	$(269_{-25}^{+40}) - i(211_{-23}^{+26})\text{MeV}$

- $\mathcal{O}(N)\text{LO}$ 振幅左手割线位置是错的。



当 σ 成为束缚态时, u 道和 t 道振幅会贡献新的左手割线, 而 $\mathcal{O}(N)\text{LO}$ 并没有包含 t 道和 u 道, 因为这两项都是 NLO, 这也表明 **LO 振幅破坏了交叉对称性**。由于完整的 NLO 振幅计算太复杂, 因此我们只能采取一些方法近似地考虑交叉道的影响。

$\mathcal{O}(N)$ 线性 σ 模型 + N/D 方法

- 考虑部分 NLO 的振幅:

$$\begin{aligned}T_{00}(s) &= \frac{N-1}{32\pi} A^{LO}(s) + I_{tu}(s) \\A^{LO}(s) &= \frac{m_\pi^2 - s}{(s - m_\pi^2) NB(s, m_\pi, M) - f_\pi^2} \\I_{tu}(s) &= \frac{1}{16\pi (s - 4m_\pi^2)} \int_{4m_\pi^2 - s}^0 dt A^{LO}(t)\end{aligned}\tag{23}$$

- 当 σ 变为束缚态后, $I_{tu}(s)$ 会自动产生新的割线: $(-\infty, 4m_\pi^2 - m_\sigma^2)$ 。
- 虽然恢复了部分的交叉对称性, 但不满足么正性。
- N/D 方法来恢复么正性。

不失一般性, 把分波振幅 $T(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$

- $N(s)$ 只包含左手割线:

$$\text{Im}_L N(s) = D(s) \text{Im}_L T(s)\tag{24}$$

- $D(s)$ 只包含右手割线:

$$\text{Im}_R D(s) = -\rho(s) N(s)\tag{25}$$

对二者分别做两次减除并写下色散关系：

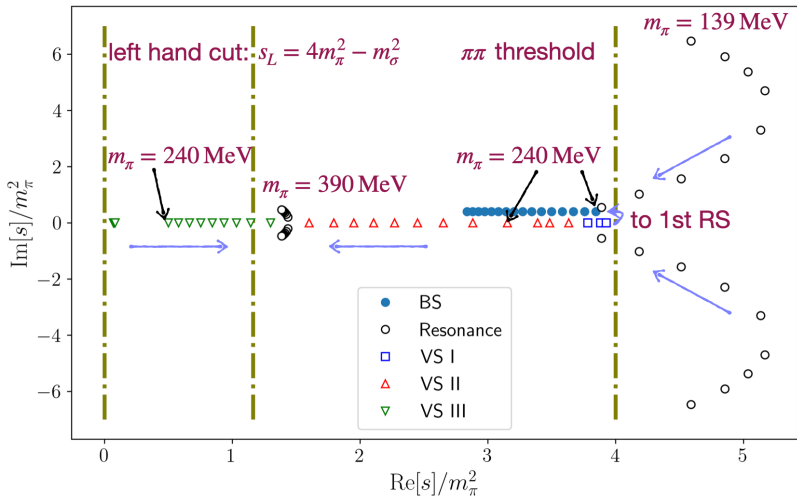
$$\begin{aligned} D(s) &= 1 + a_0(s - s_0) - \frac{(s - s_0)^2}{\pi} \int_R \frac{\rho(s') N(s')}{(s' - s)(s' - s_0)^2} ds' \\ N(s) &= b_0 + b_1(s - s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{\pi} \int_L \frac{D(s') \text{Im}_L T(s')}{(s' - s)(s' - s_0)^2} ds' \end{aligned} \quad (26)$$

- 把 $D(s)$ 代入 $N(s)$ 中将得到一个关于 $N(s)$ 的积分方程。
- 输入 $\text{Im}_L T(s)$ 便可数值求解该方程。

输入：

$$T_{00}(s) = \frac{N-1}{32\pi} A^{LO}(s) + I_{tu}(s) \quad (27)$$

我们便得到了有么正性，也具有部分交叉对称性的振幅。然后我们再看 m_π 变动下振幅的极点情况。



有限温中 σ 共振极点的跑动轨迹

- 随着温度升高, QCD 的手征对称性将慢慢恢复; [H. T. Ding et al. (HotQCD), 2019]
- 在没有显式破缺的 $\mathcal{O}(N)$ 中, 临界温度 $T_c \simeq \sqrt{12/N} f_\pi \simeq 160 \text{ MeV}$; [A. Bochkev, 1996; J. O. Andersen, 2004]
- 临界温度以上, 没有显式破缺时 σ 和 π 的质量应该简并;

有限温下, 真空期望值 v 与 m_π^2 [J. O. Andersen, 2004]:

$$v^2(T) = f_\pi^2 + \frac{N}{16\pi^2} \left(m_\pi^2 \log \frac{m_\pi^2}{M^2} - m_\pi^2(T) \log \frac{m_\pi^2(T)}{M^2} \right) - NA^{T \neq 0} (m_\pi^2(T))$$
$$\alpha = v(T) m_\pi^2(T) \quad (28)$$

- $T = 0$, $v(T) = f_\pi$, $m_\pi(0) = m_\pi$;

$$A^{T \neq 0} (m_\pi^2(T)) = \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi^2} \frac{k^2 n_B(\omega_k)}{\omega_k}$$

- $\beta = 1/T$, $\omega_k = \sqrt{k^2 + m_\pi^2(T)}$, $n_B(\omega_k) = (e^{\beta\omega_k} - 1)^{-1}$ (Bose-Einstein 分布)

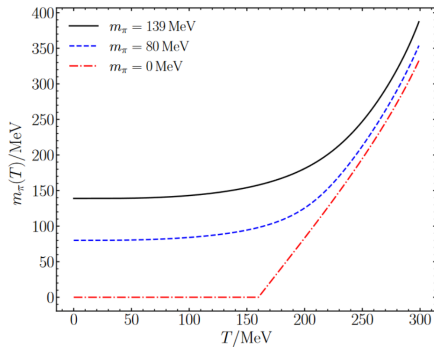
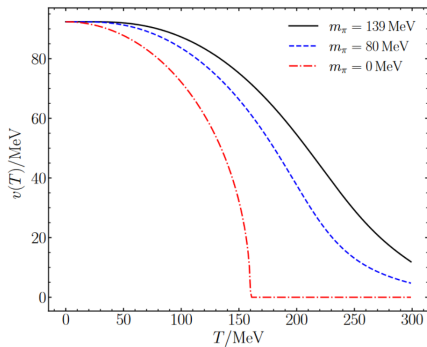


图: $v(T)$ [左] 和 $m_\pi(T)$ [右] 随着温度升高的曲线;

- 没有显式破缺时, $m_\pi(0) = 0$, 存在一个二级相变, $T_c \simeq 160$ MeV;
- 存在显式破缺, $m_\pi(0) \neq 0$, 没有相变, 但 $v(T) \rightarrow 0$ 随着温度的升高。

有限温下，零头阶 $\pi\pi$ 散射振幅：

$$\mathcal{T}_{00}^T(s) = -\frac{1}{32\pi} \frac{s - m_\pi^2(T)}{(s - m_\pi^2(T)) B^T(s, m_\pi(T), M) - v^2(T)/N}, \quad (29)$$

• 有限温时的两点关联函数：

$$B^T(s, m_\pi(T), M) = B(s, m_\pi(T), M) + B^{T \neq 0}(s, m_\pi(T))$$

$$B^{T \neq 0}(s, m_\pi(T)) = \int_0^\infty \frac{dk k^2}{8\pi^2 \omega_k^2} n_B(\omega_k) \left(\frac{1}{E + 2\omega_k} - \frac{1}{E - 2\omega_k} \right), \quad (30)$$

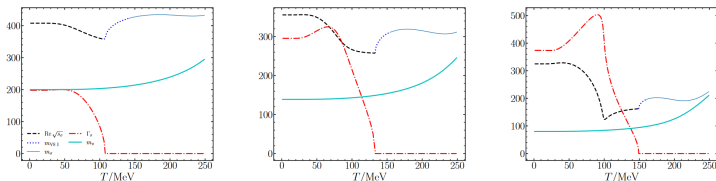


图: σ 共振态的质量和宽度随着温度的变化曲线。从左到右, $m_\pi(0) = 200, 139, 80$ MeV

总结

- 在 $\mathcal{O}(N)$ 线性 σ 模型中, 随着 m_π 质量的增大, σ 也将从一个共振态变成一个束缚态, 与 $f_0(500)$ 性质一样。
- 当考虑部分交叉对称性后, 由 $\mathcal{O}(N)$ 模型得到的图像与 Roy 方程的定性上完全一致。这进一步表明 $\mathcal{O}(N)$ 模型中的 σ 就是 $f_0(500)$ 。
- $\pi\pi$ 散射过程中的 $f_0(500)$ 也扮演着与 σ 在 $\mathcal{O}(N)$ 模型中同样的角色-为对称性自发破缺提供真空期望值。
- 当温度升高时, σ 共振极点会先跑到实轴上成为一对虚态, 然后其中一个将穿过阈到第一黎曼页成为束缚态。而在高温下, 它会趋近 π 介子质量。
- 启发我们研究 πN 散射中 $N^*(920)$ [X.-H. Cao, QZL, and H.-Q. Zheng, 2022] 随着介子质量和温度的跑动轨迹。