

么正条件下的开粲介子手征动力学



郭霄雨

北京工业大学



XYG, Heo, Lutz: PRD 98 (2018) 014510

XYG, Lutz: PRD 104 (2021) 054035

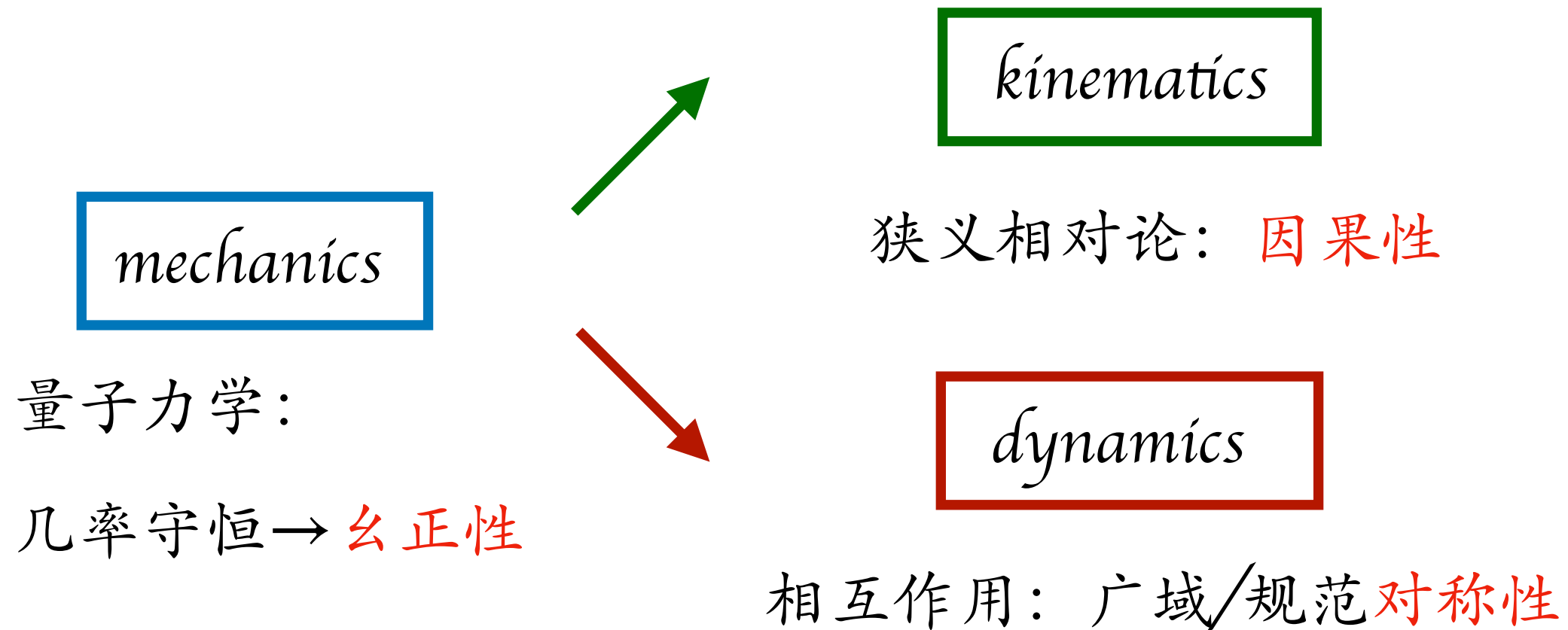
Lutz, XYG, Heo, Korpa: PRD 106 (2022) 114038

强子物理在线论坛 2023年6月25日

- **Outline**

- 绪言
 - 散射理论；有效场论
- 粲介子质量的手征外推和s-波开粲散射的手征修正
 - 利用手征外推确定低能常数 (LEC)；基于Bethe-Salpeter重求和的么正化方案
 - 推广到底介子散射
- 广义势方法及散射振幅的手征外推
 - 一次减除的色散关系；左手割线
 - 广义势； N/D 方法
 - 格点散射相移的手征外推

- 基本粒子散射过程 → 基本物理理论



- ▶ 场论: 直接、系统化的实现方式
 - ▶ 满足一定对称性的相互作用哈密顿量
 - ▶ 微扰论 → 费曼规则:
 - ▶ 散射振幅的因果性, 逐阶么正性

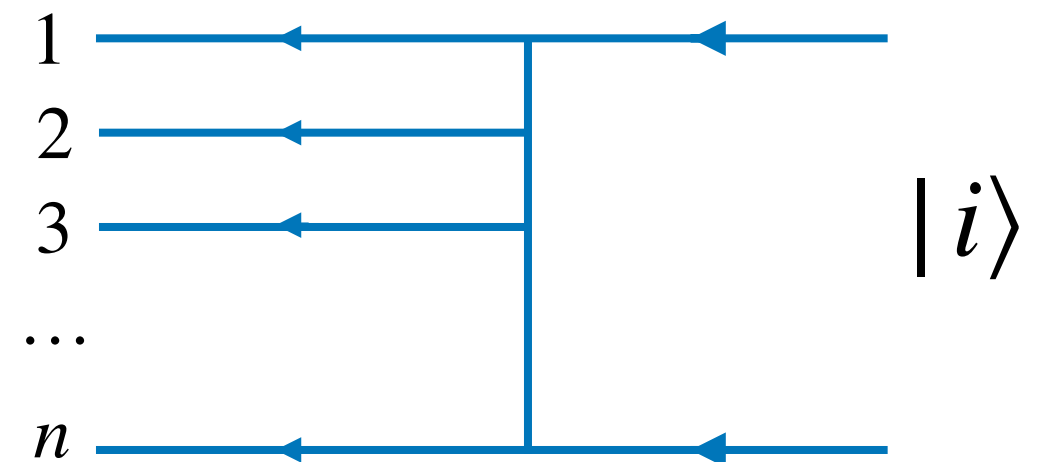
- 场论方法微扰地解释强相互作用？
 - ▶ $g_{\pi NN}^2/4\pi \sim 1000 e^2/4\pi$
 - ▶ 微扰论的失效
 - ▶ 50 ~ 60 年代转向：S-矩阵理论
- 1943-1946年：Heisenberg 替代场论提出“S-矩阵”
 - ▶ 散射过程中的唯一可观测量
 - ▶ 最一般的限制原则：幺正性、因果性和对称性
 - ▶ 避免指涉具体哈密顿量和运动方程

- 么正性:

- ▶ $S^\dagger S = 1$: 散射粒子跃迁到所有中间态的几率和 $= 1$
- ▶ 跃迁矩阵 (T -矩阵, $S = 1 + iT$) 在中间粒子的产生阈以上存在割线:

$$2 \operatorname{Im} T_{fi} = \sum_n \int \left(\prod_{l=1}^n \frac{d^3 p_l}{2E_l (2\pi)^3} (2\pi)^4 \delta(P_i - \sum_l p_l) \right) T_{fn}^* T_{ni}$$

- ▶ 复能量空间的不解析性
 - ▶ Heisenberg 放弃S矩阵理论: 需要哈密顿量提供复能量空间S矩阵的解析行为
 - ▶ 1940s Kroenig: 利用因果性对S矩阵解析性做出限制



- 因果性:

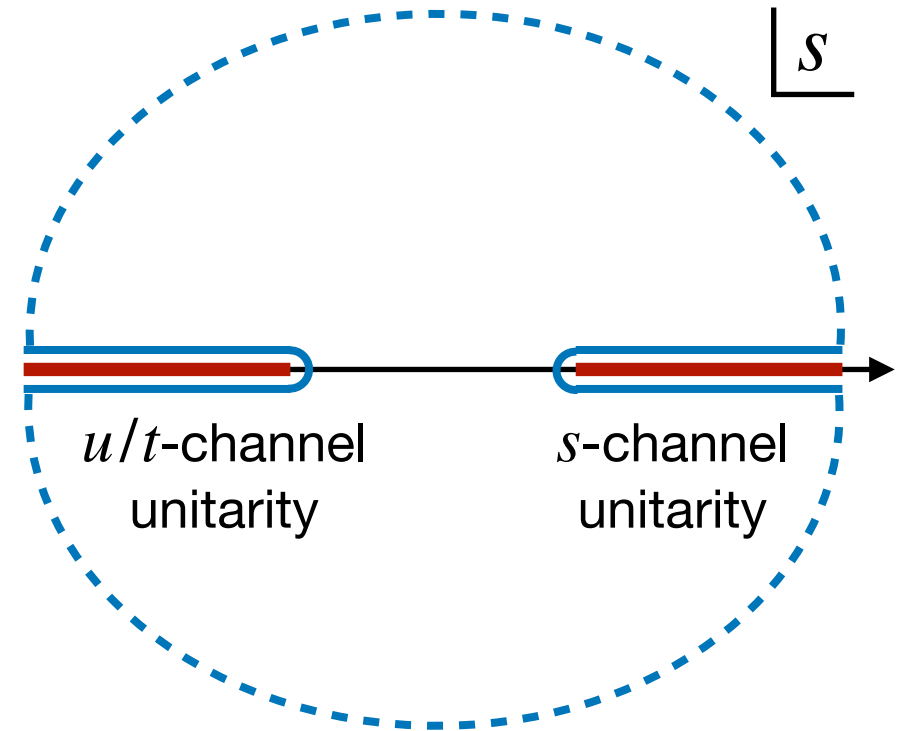
- Goldberger, Gell-Mann, Chew:

- 相对论性散射振幅物理黎曼叶的不解析点全部位于实轴

- 色散关系

$$T(s) = T(\mu_M^2) + \int_{\text{left}} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{s - \mu_M^2}{\bar{s} - \mu_M^2} \frac{\text{Im}T(\bar{s})}{\bar{s} - s - i\epsilon} + \int_{\text{right}} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{s - \mu_M^2}{\bar{s} - \mu_M^2} \frac{\text{Im}T(\bar{s})}{\bar{s} - s - i\epsilon}$$

- (一次减除的色散关系)



可以应用么正性条件

- 1960s: 基于色散关系, S矩阵理论取得瞩目的成就

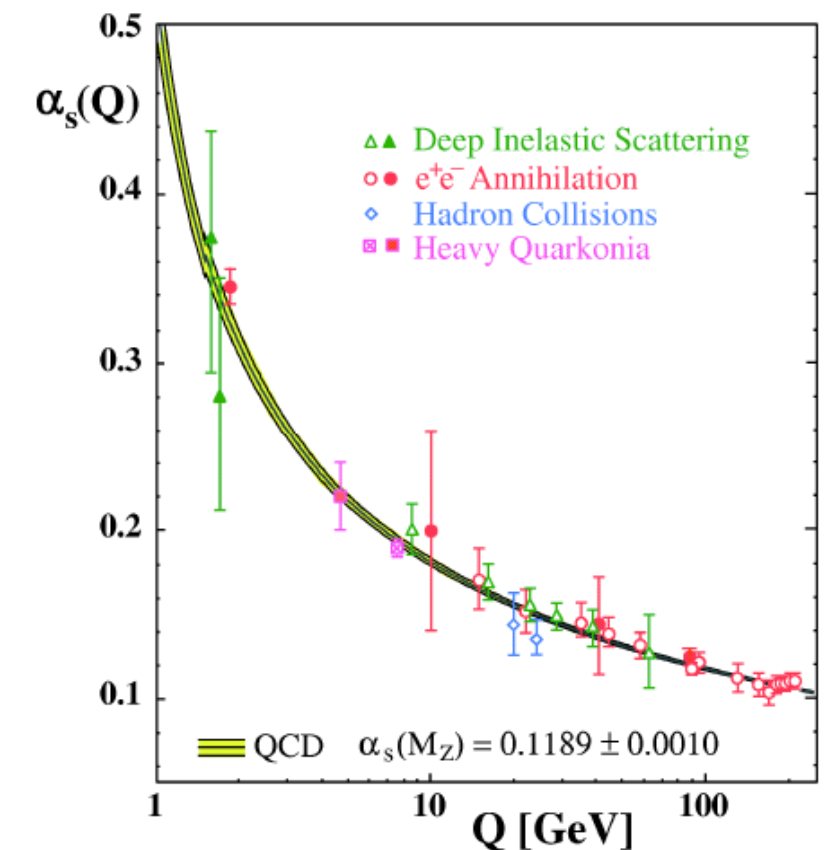
- ▶ e.g. Regge 理论, Veneziano 模型 → 弦论

- 但一直未能完全理解强相互作用的实质

- ▶ Pauli: S矩阵理论是“空洞”的

- ▶ 1960年代末: Bjorken 标度律

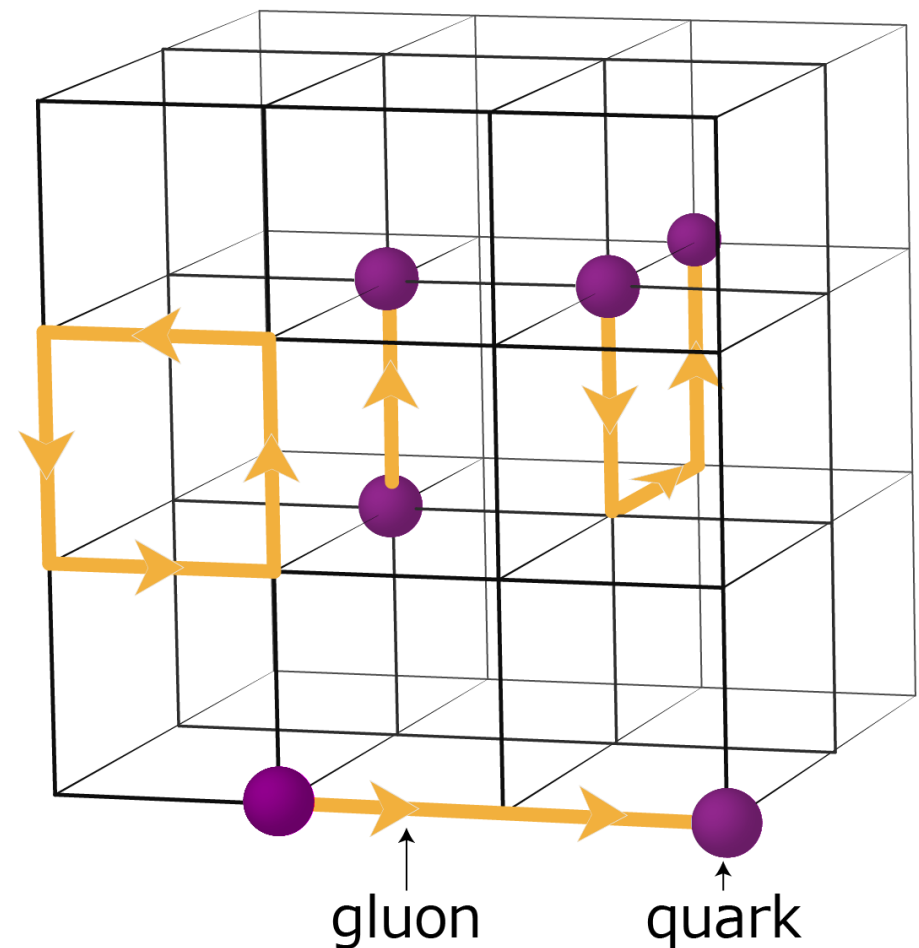
→ 强相互作用效应很弱的“部分子”



- 1972-1973: Gross et.al: 非阿贝尔规范场论的渐近自由特征

- ▶ QCD: 场论几乎一夜间“从闹剧走向胜利 (*from farce to triumph*)”——*David Gross*

- QCD的渐近自由：
 - ▶ 高能下直接应用微扰场论解决
 - ▶ 低能下微扰场论不适用 → 如何解释丰富的强子间动力学现象？
- Wilson:
 - ▶ 离散化时空，数值求解 QCD 作用量生成的路径积分
 - ▶ **格点QCD**
 - ▶ 大多数计算基于非物理夸克质量：利用有效场论进行外推



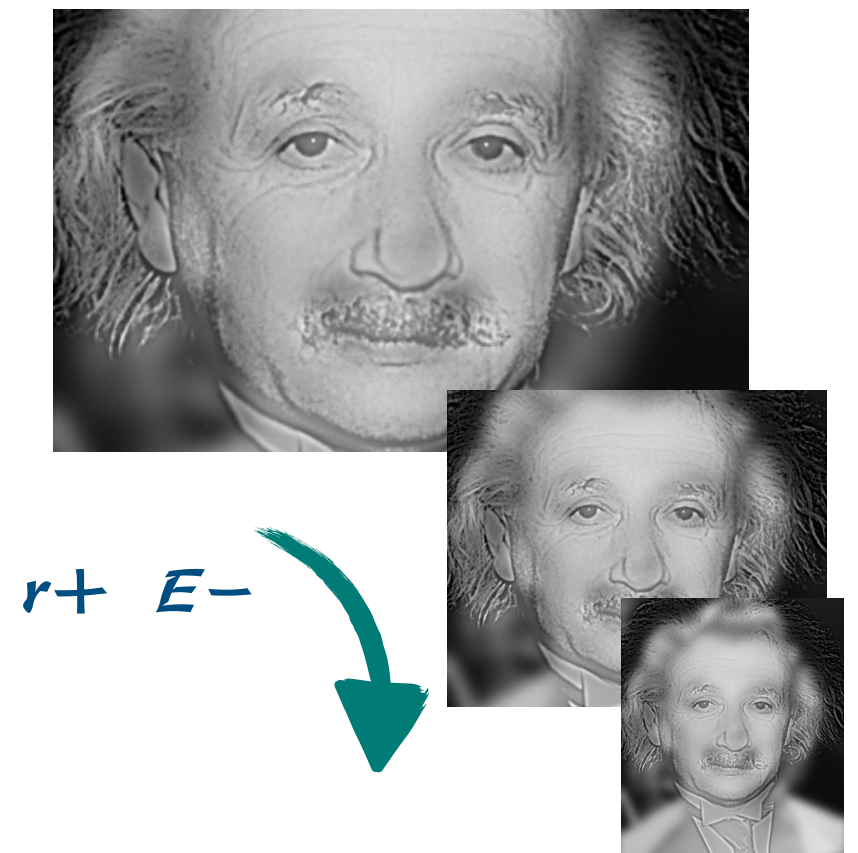
- Weinberg:

- ▶ 手征对称性自发破缺的Goldstone玻色子： π 介子为自由度构造有效哈密顿量进行微扰场论计算，得到复杂的流代数结果

- ▶ 手征微扰论 (χ PT)

- ▶ 有效场论:

- ▶ 我们需要了解每个分子的运动状态才需要了解一个桌子的运动状态吗?
- ▶ 积掉小尺度上的相关自由度，留下大尺度上的有效自由度描述大尺度上的物理
 - ▶ Wilson 的重整化思想



- e.g. 重夸克有效理论 (HQET):

- ▶ 适用于重味强子体系:

- ▶ 重夸克味道对称性; 重夸克自旋对称性

- ▶ 重夸克QCD拉氏量 $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^Q = \bar{Q}(i\not{D} - m_Q)Q$

- ▶ 重夸克自由度分解为大尺度和小尺度相关自由度

$$Q = e^{-im_Q v \cdot x} (h_v + H_v) + (\text{anti-quark}) \rightarrow \text{大分量和小分量}$$

- ▶ $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^Q = \bar{h}_v i v \cdot \not{D} h_v - \bar{H}_v (i v \cdot \not{D} + 2m_Q) H_v + \bar{h}_v i \not{D}_\perp H_v + \bar{H}_v i \not{D}_\perp h_v + (\text{anti-quark})$

- ▶ 积掉小分量得到有效作用量

$$\exp(iS_{\text{eff}}) = \int D\bar{H}_v D H_v \exp\left(i \int \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{Q(\text{quark})}\right)$$

- ▶ 非局域作用量 $\rightarrow$ 按 $O\left(\frac{\not{D}}{m_Q}\right)$ 作局域展开

$$\rightarrow S_{\text{eff}}(1/m_Q \text{ expanded}) = \left(\int \mathcal{L}_{\text{HQET}} \right) \times \text{const.}$$

- ▶ 实现有效场论的 Top-down 方法

- 可在不需要知道底层理论的前提下构造有效场论：

"When you use quantum field theory to study low-energy phenomena,...you're not really making any assumption that could be wrong, ...provided you don't say specifically what the Lagrangian is. As long as you let it be the most general possible Lagrangian consistent with the symmetries of the theory, you're simply writing down the most general theory you could possibly write down"- S. Weinberg.

- ▶ 利用低能下的有效自由度构造出**全部**同底层理论**对称性**一致的有效哈密顿量，生成有效场论 → 低能下与底层理论等价
- ▶ 场论的实质是利用哈密顿量实现振幅的对称性、因果性和么正性
 - ▶ 我们构造的所有场论本质上都是某个基本理论在低能下的有效场论
- ▶ 实现有效场论的 **Bottom-up** 方法
 - ▶ 手征微扰论；标准模型

- ▶ 任何构成有效场论的有效哈密顿量包括无穷多项
 - ▶ 不可重整的：依赖于能标
 - ▶ 能隙：有效场论成立能标 vs 破缺能标
 - ▶ **power counting**: 有效能标/破缺能标 对生成的振幅贡献重要性排序
 - ▶ χ PT (SU(3)): $Q \sim \frac{m_{\pi,K,\eta} \sim \sqrt{m_{u,d,s}}}{(\Lambda \sim m_\rho)} \rightarrow$ 微扰的轻夸克手征动力学效应
 - ▶ HQET: $\frac{\Lambda_{\text{QCD}}}{m_Q} \rightarrow$ 微扰的重夸克动力学效应
 - ▶ 解析的方法成为可能
- ▶ 重味强子系统：含有轻重夸克的强子系统
 - ▶ 因同时涉及手征对称性和重夸克对称性，而在理解QCD低能行为中占有特殊的理论地位
 - ▶ 开粲介子：本报告的讨论对象

- 有效理论的适用能区 vs 实际物理能区?

- ▶ 手征微扰论:

- ▶ $2 \rightarrow 2$ 散射:

适用能区 $\leftrightarrow$ Mandelstam三角形

- ▶ 实际过程发生在Mandelstam三角形外

- 微扰地扩展适用能区:

- ▶ 高阶相互作用强度

- ▶ 未知低能常数 (LEC)

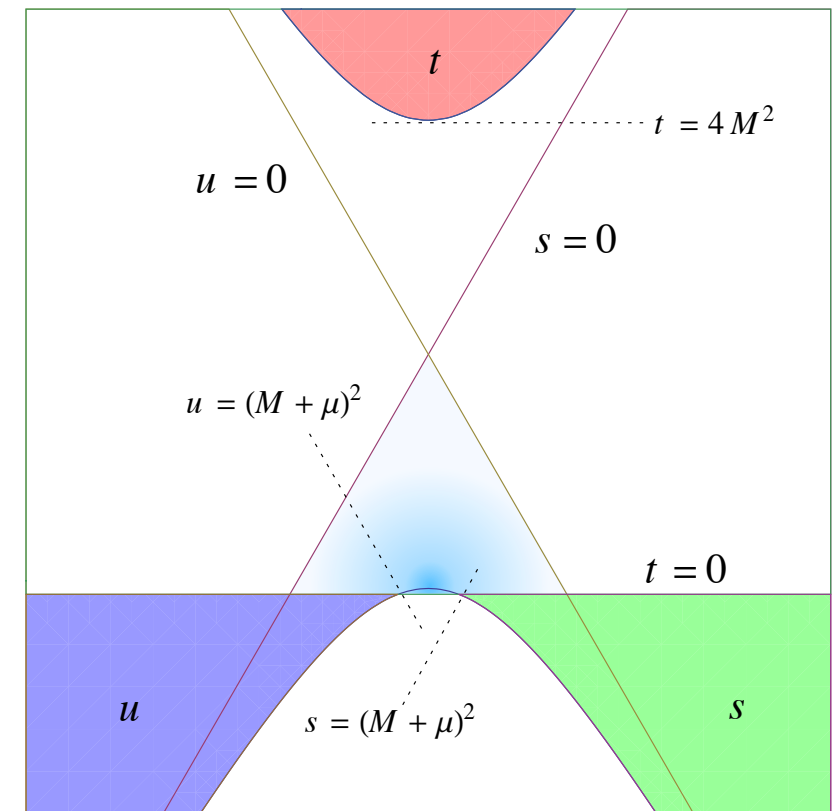
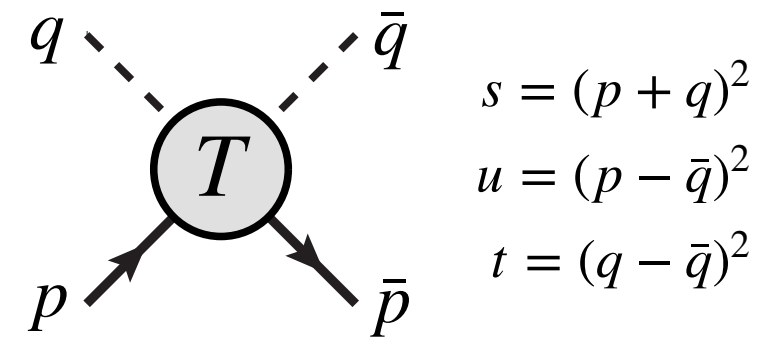
- ▶ 利用格点QCD的模拟结果:

- ▶ 物理量在不同非物理夸克质量下的数值结果 $X(m_{u,d,s})$

- ▶ 手征微扰论的解析解: $X(m_{u,d,s}) = X_0 + X_1 Q + X_2 Q^2 + \dots$

- ▶ 手征外推

手征对数... + 低能常数



$D\pi \rightarrow D\pi$ 弹性散射的Mandelstam图

- 开粲介子基态质量的手征外推 [XYG, Lutz, Heo 2018]

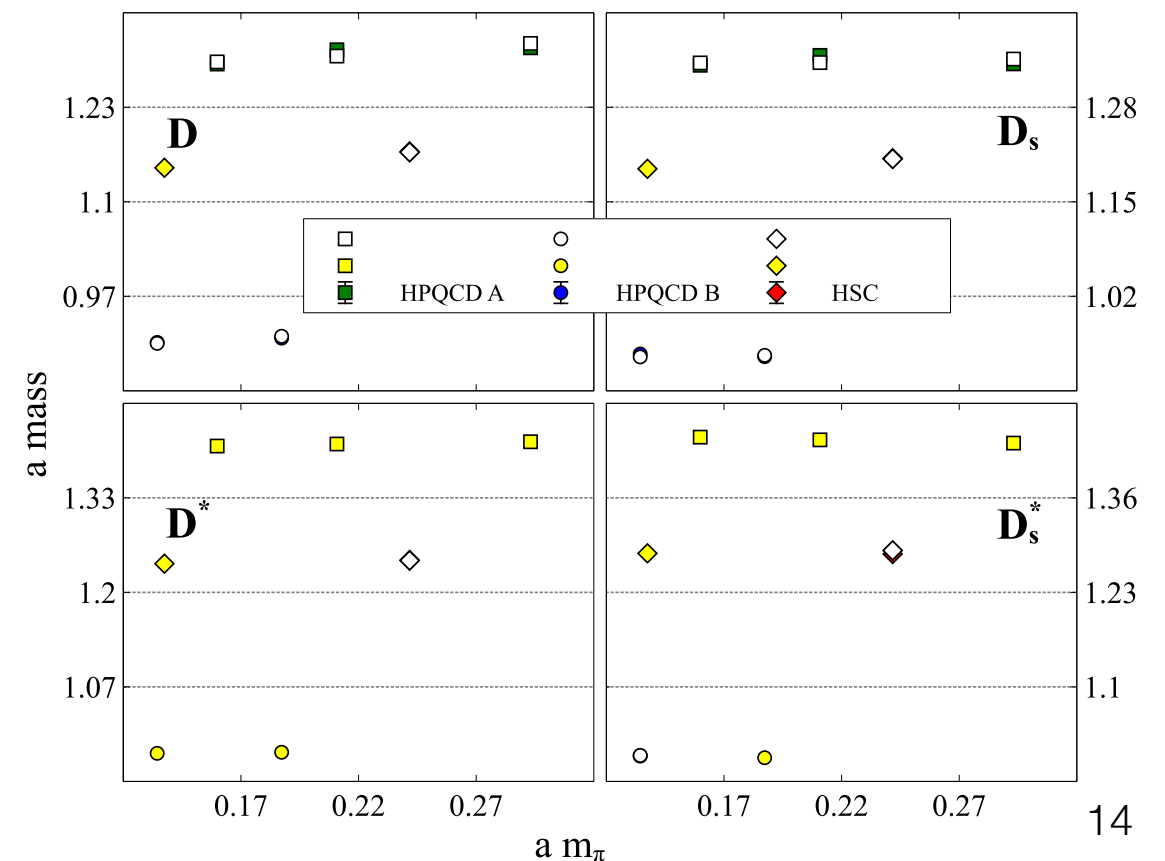
- 次领头阶 (相对论性) 手征拉氏量 ($0^- D/D_s$ 介子)

$$\mathcal{L}^{(2)} = -(4c_0 - 2c_1)D\bar{D}\text{tr}\chi_+ - 2c_1D\chi_+\bar{D} + 4(2c_2 + c_3)D\bar{D}\text{tr}(U_\mu U^{\mu\dagger}) - 4c_3DU_\mu U^{\mu\dagger}\bar{D} \\ + \frac{1}{M^2}(4c_4 + 2c_5)(\hat{\partial}_\mu D)(\hat{\partial}_\nu \bar{D})\text{tr}[U^\mu, U^{\nu\dagger}]_+ - \frac{1}{M^2}2c_5(\hat{\partial}_\mu D)[U^\mu, U^{\nu\dagger}]_+(\hat{\partial}_\nu \bar{D})$$

- 生成 $D_{(s)}/D_{(s)}^*$ 介子质量的手征修正:

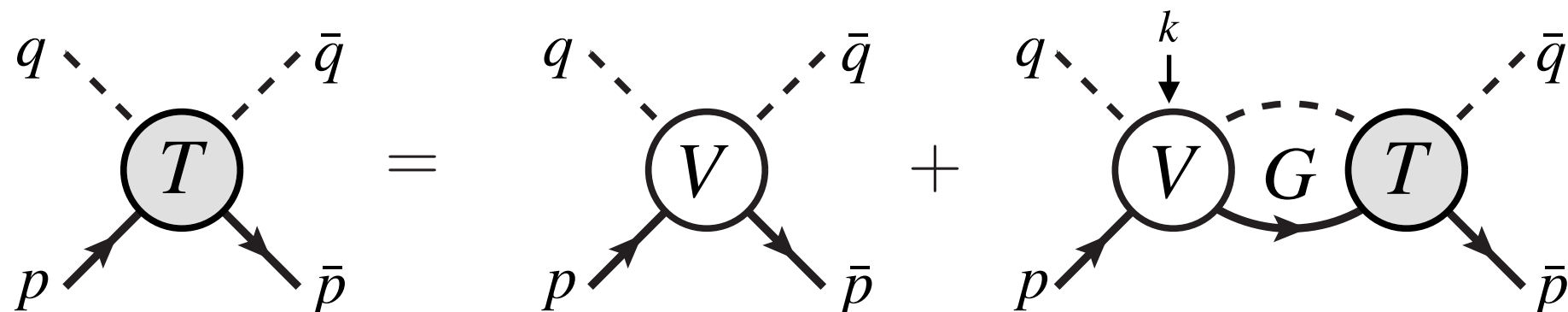
$$M_H^2(m_{u,d,s}) = \begin{array}{c} H \longleftarrow \\ \boxed{\text{LEC}} \end{array} + \begin{array}{c} H \longleftarrow \bigcirc \longleftarrow \\ \boxed{D_{(s)}/D_{(s)}^*} \end{array} + \begin{array}{c} \pi, K, \eta \\ \text{loop} \\ H \longleftarrow \square \longleftarrow \square \longleftarrow \\ \boxed{D_{(s)}/D_{(s)}^*} \end{array} + \begin{array}{c} \pi, K, \eta \\ \text{loop} \\ H \longleftarrow \bigcirc \longleftarrow \\ \boxed{D_{(s)}/D_{(s)}^*} \end{array} + \begin{array}{c} H \longleftarrow \blacklozenge \longleftarrow \\ \boxed{\text{LEC}} \end{array}$$

- 自洽求解 $D_{(s)}/D_{(s)}^*$ 介子质量
- 有限体积修正效应
- 64个来自5个不同格点组 (ETMC, PACS, HPQCD, LHPC, HSC) 不同非物理夸克质量下的 $D_{(s)}/D_{(s)}^*$ 介子质量
 - 拟合次领头阶低能常数



- 丰富的共振态位于 Mandelstam 三角形外很远的区域
 - 如何将手征动力学效应推广到强子散射 (耦合道) 的共振态能区?
- 非微扰：利用S-矩阵理论
 - 实现散射振幅的 (非微扰) 么正性和因果性
 - 手征相互作用哈密顿量 $\rightarrow$ 实现振幅的对称性
 - 场论和散射理论的一次结合：手征微扰论的么正化推广
- 一个基于Bethe- Salpeter方程的么正化方案
 - 振幅的么正性：

▸ Bethe- Salpeter方程：
$$T(s, t) = V(s, t) + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} V(p, q, k) G(k) T(k, \bar{p}, \bar{q})$$



- 对积分核做在壳近似: $V(p, q, k) \rightarrow V(s, t)$

- Bethe-Salpeter 积分方程化为代数方程



- $00 \rightarrow 00$ (0自旋粒子散射) 分波振幅: $T^J(s) = \left(\frac{s}{\bar{p}_{\text{cm}} p_{\text{cm}}} \right)^J \int_{-1}^1 \frac{dx}{2} T(s, t) P_J(x)$

- $T^J(s) = (1 - V^J I)^{-1} V^J$

- 单圈积分 $I(s) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} G(k)$ 有虚部 $\text{Im } I(s > s_{\text{thr}}) = \frac{p_{\text{cm}}}{8\pi\sqrt{s}}$,

- s-波振幅的么正性得到满足 $\text{Im} [T^J(s > s_{\text{thr}})]^{-1} = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{p_{\text{cm}}}{s^{1/2}} \right)^{2J+1}, J = 0$

- 可以直接计及耦合道效应

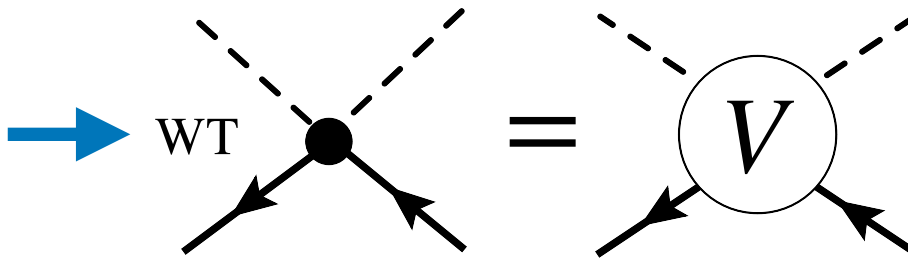
- 振幅的手征对称性: 通过ChPT生成的散射振幅作为散射核 V

• 开粲介子耦合道散射 (D和Goldstone玻色子):

- ▶ 以领头阶手征拉氏量 (Weinberg-Tomozawa)生成的Bethe-Salpeter重求和振幅
[Lutz et al 2003; Guo et al 2006]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \text{tr}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \frac{1}{4} \text{tr} \chi_0 \Phi^2 + (\partial_\mu D)(\partial^\mu \bar{D}) - DM_0^2 \bar{D} + \frac{1}{8f^2} \{ (\partial^\mu D)[\Phi, (\partial_\mu \Phi)]_- \bar{D} - D[\Phi, (\partial_\mu \Phi)]_- (\partial^\mu \bar{D}) \},$$

→ WT



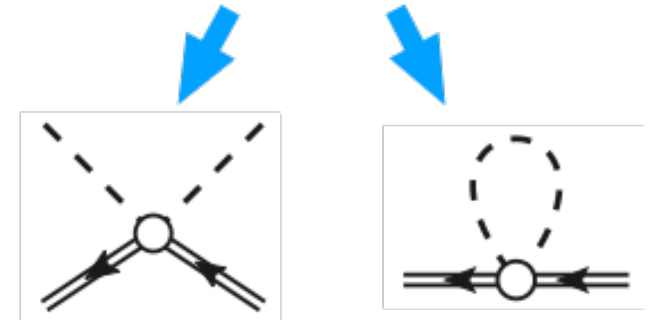
- ▶ 仅依赖于一个低能常数: π 介子衰变常数 (手征极限) $f \simeq 92 \text{ MeV}$
- ▶ $(I, S) = (0, 1)$ 耦合道 $(DK, D_s \eta)$ s波散射出现束缚态 $\rightarrow D_{s0}^*(2317)$
 - ▶ $D^*K, D_s^* \eta$ 散射重夸克对称伴子 $\rightarrow D_{s1}(2460)$
- ▶ 对 πD ($I = 1/2, S = 0$) 耦合道散射 (s波) 过程的研究
 - ▶ 共振态 $D_0^*(2400)$? 领头、次领头阶的研究: 非物理黎曼叶存在两个极点?
[Hofmann et al 2006; Geng et al 2010; Du et al 2017]
 - ▶ 味道反三重态和味道六重态成员

次领头阶手征相互作用的影响 [XYG, Lutz, Heo 2018]:

- ▶ 哈密顿形式的普遍性：次领头阶手征拉氏量同时贡献D介子质量和散射振幅的手征修正

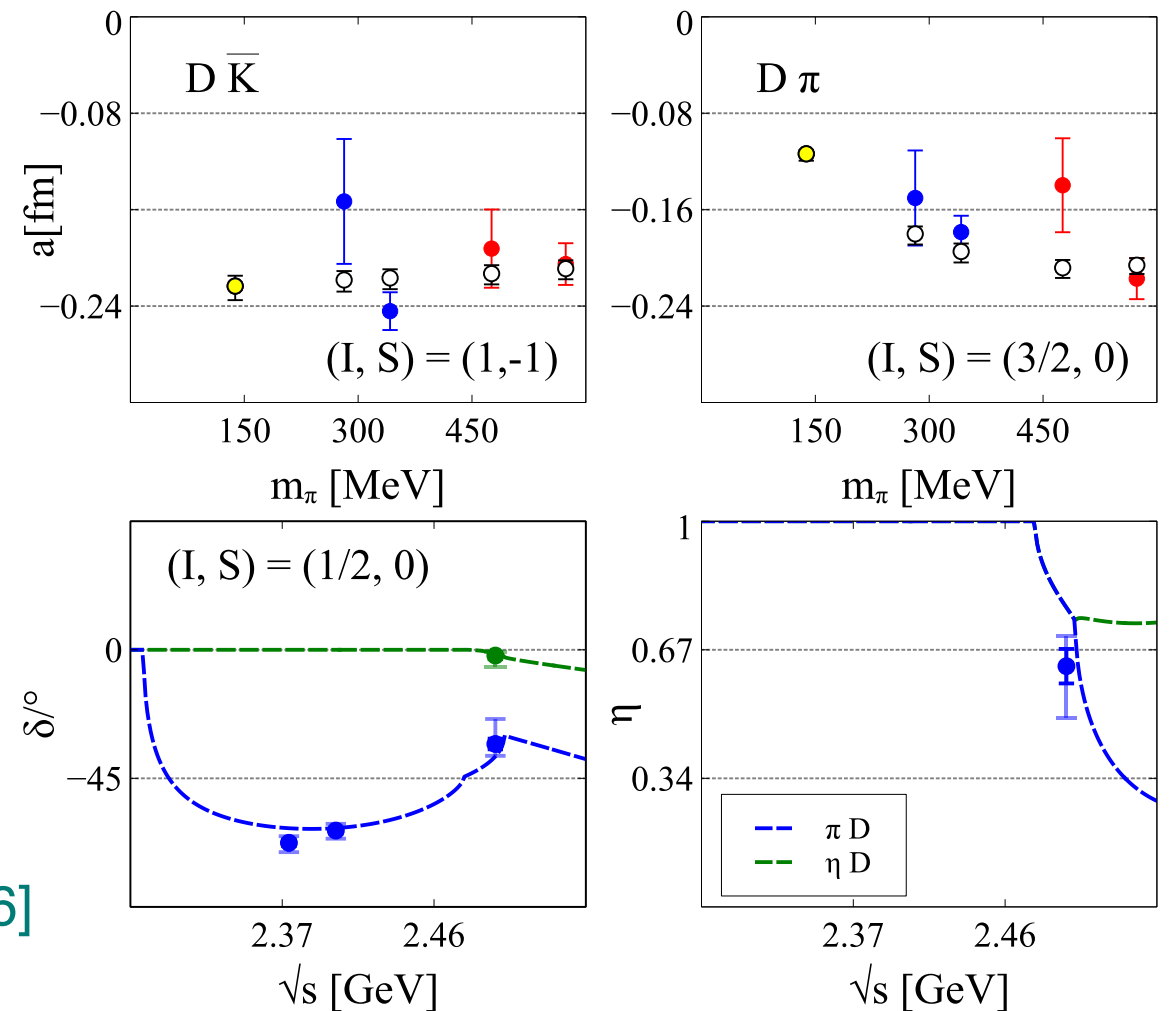
$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(2)} = & - (4c_0 - 2c_1) D \bar{D} \text{tr} \chi_+ - 2c_1 D \chi_+ \bar{D} \\ & + 4(2c_2 + c_3) D \bar{D} \text{tr}(U_\mu U^{\mu\dagger}) - 4c_3 D U_\mu U^{\mu\dagger} \bar{D} \\ & + \frac{1}{M^2} (4c_4 + 2c_5) (\partial_\mu D)(\partial_\nu \bar{D}) \text{tr}[U^\mu, U^{\nu\dagger}]_+ \\ & - \frac{1}{M^2} 2c_5 (\partial_\mu D)[U^\mu, U^{\nu\dagger}]_+(\partial_\nu \bar{D})\end{aligned}$$

NLO Lagrangian



- ▶ 同时拟合 D 介子的质量和散射振幅的格点数据，确定次领头阶低能常数

- ▶ 64个基态 D 介子质量格点数据点
- ▶ 基于LHPC的 $D\bar{K}$ 等散射道的散射长度 [Liu et al 2013]
- ▶ HSC格点组在 $m_\pi \sim 390\text{MeV}$ 的 $(\pi D, \eta D)$ 耦合道散射相移 [HSC 2016]

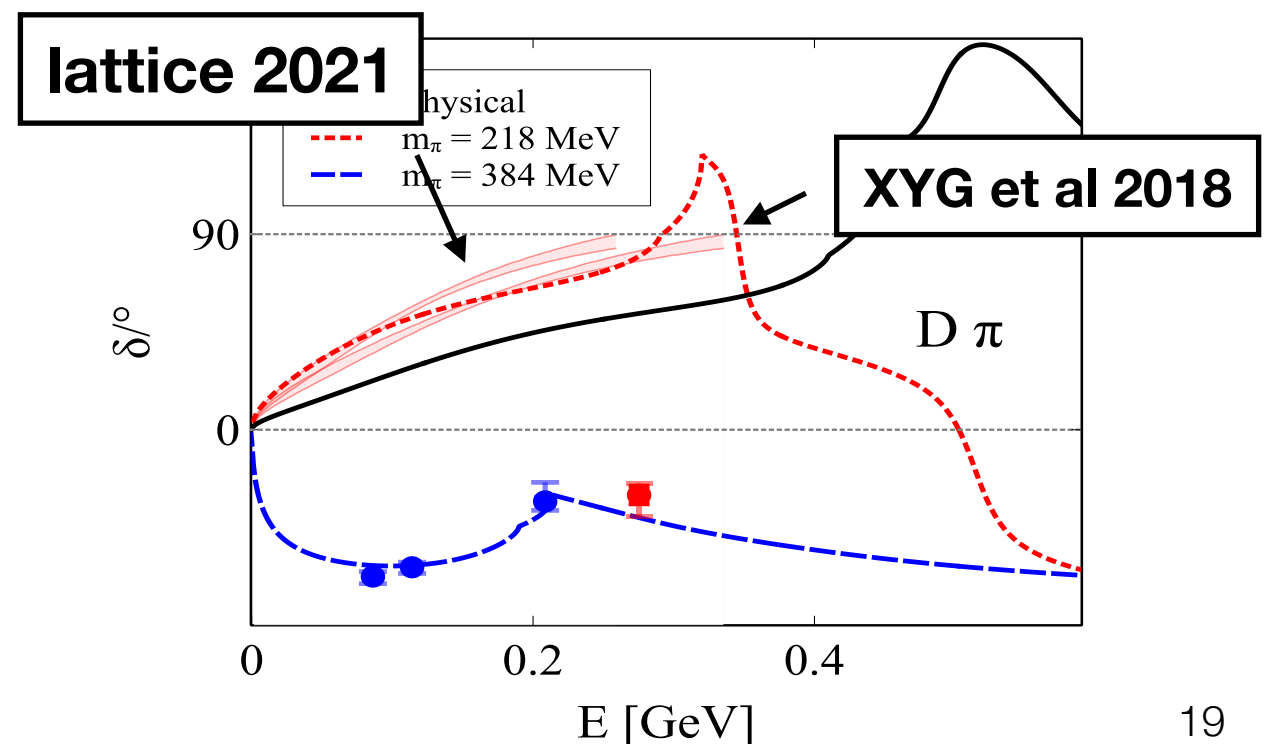
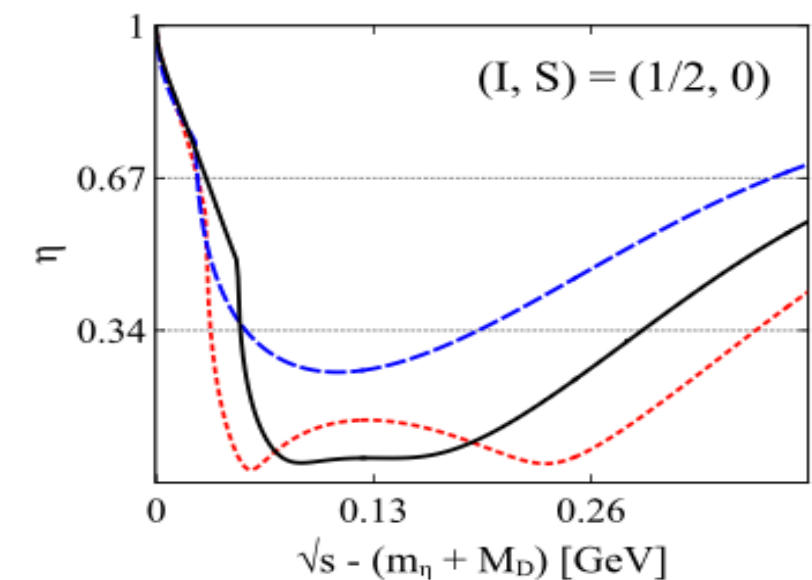
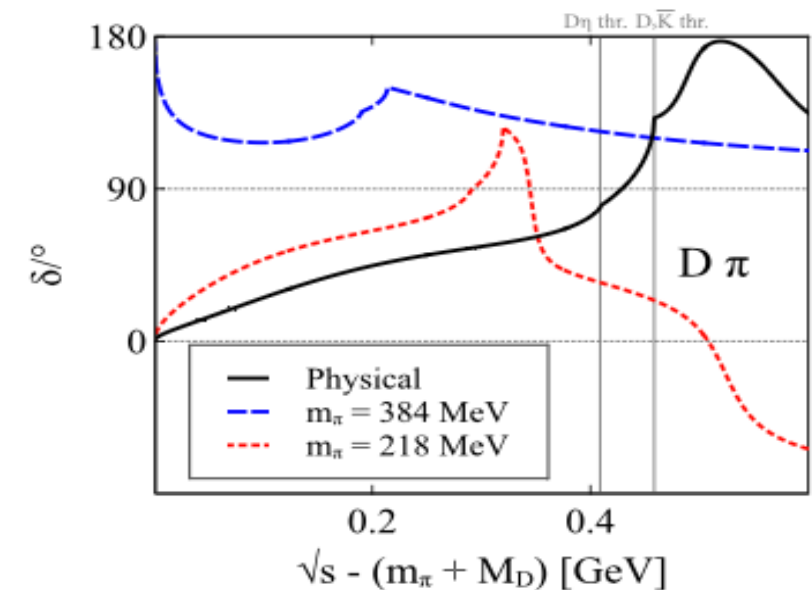


- πD ($I = 1/2$) 耦合道散射相移行为强烈依赖于夸克质量

- ▶ 在 $m_\pi \sim 390\text{MeV}$, 反三重态在阈下 $\rightarrow$ 束缚态
- ▶ 在物理质量 $m_\pi \simeq 140\text{MeV}$, 反三重态成为宽共振态

- ▶ 双极点结构

- ▶ 预言在非物理质量下 $m_\pi \sim 230\text{MeV}$ 的 πD 散射相移
- ▶ 对应于HSC的一个格点组态
- ▶ 与2021年的HSC格点计算结果惊人一致 [HSC 2021]



- 利用重夸克对称性扩展到底介子系统 [XYG, Lutz 2021]:

- ▶ 与重夸克有效理论匹配确定手征拉氏量 LEC 随重夸克质量的标度变化关系
- ▶ 重介子次领头阶手征破缺拉氏量

$$\mathcal{L}_\chi = -(4c_0 - 2c_1) H \bar{H} \text{tr} \chi_+ - 2c_1 H \chi_+ \bar{H} + (2\tilde{c}_0 - \tilde{c}_1) H^{\mu\nu} \bar{H}_{\mu\nu} \text{tr} \chi_+ + \tilde{c}_1 H^{\mu\nu} \chi_+ \bar{H}_{\mu\nu}$$

- ▶ 重夸克对称领头阶破缺效应: 手征极限下重介子质量劈裂 Δ

$$c_{0,1}(m_Q) = \bar{M}^{(Q)} \left(C_{0,1} + \frac{\zeta_{0,1}}{\bar{M}^{(Q)}} - \frac{3}{4} \frac{\eta_{0,1}^{(Q)}}{\bar{M}^{(Q)}} \right)$$

$$\tilde{c}_{0,1}(m_Q) = \bar{M}^{(Q)} \left(C_{0,1} + \frac{\zeta_{0,1}}{\bar{M}^{(Q)}} + \frac{1}{4} \frac{\eta_{0,1}^{(Q)}}{\bar{M}^{(Q)}} \right)$$

- ▶ 生成重味介子质量的手征修正

$$M_H^2 = \begin{cases} \left(\bar{M} - \frac{3}{4} \Delta \right)^2 + (4c_0 - 2c_1) \Pi_H^{(2),0} + 2c_1 \Pi_H^{(2),1} + \text{loops}, & H \in [J^P = 0^-] \\ \left(\bar{M} + \frac{1}{4} \Delta \right)^2 + (4\tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1) \Pi_H^{(2),0} + 2\tilde{c}_1 \Pi_H^{(2),1} + \text{loops}, & H \in [J^P = 1^-] \end{cases}$$

- ▶ 与重夸克有效理论下重味介子质量修正项“匹配”

$$M_H(m_Q) = \begin{cases} m_Q + \bar{\Lambda}_{(H)} + \frac{\mu_{\pi(H)}^2}{2m_Q} - \frac{\mu_{G(H)}^2}{2m_Q} & H \in [0^-] \\ m_Q + \bar{\Lambda}_{(H)} + \frac{\mu_{\pi(H)}^2}{2m_Q} + \frac{\mu_{G(H)}^2}{6m_Q} & H \in [1^-] \end{cases}$$

pQCD

色磁矩 μ_G^2 的
圈修正

匹配

HQET

Wilson系数

$$C_{\text{cm}}(m_Q, m_Q)$$

高能 $\mu \sim m_Q$

重整化群方程

低能 $\mu \ll m_Q$

RG不变的 Wilson 系数
 $\hat{C}_{\text{cm}}(m_Q)K(\mu) = C_{\text{cm}}(m_Q, \mu)$

• HQET D介子质量

$$M_H(m_Q) =$$

$$\begin{cases} m_Q + \bar{\Lambda}_{(H)} + \frac{\mu_{\pi(H)}^2}{2m_Q} - \frac{\mu_{G(H)}^2}{2m_Q}, & 0^- \\ m_Q + \bar{\Lambda}_{(H)} + \frac{\mu_{\pi(H)}^2}{2m_Q} + \frac{\mu_{G(H)}^2}{6m_Q}, & 1^- \end{cases}$$

• ChPT D介子质量

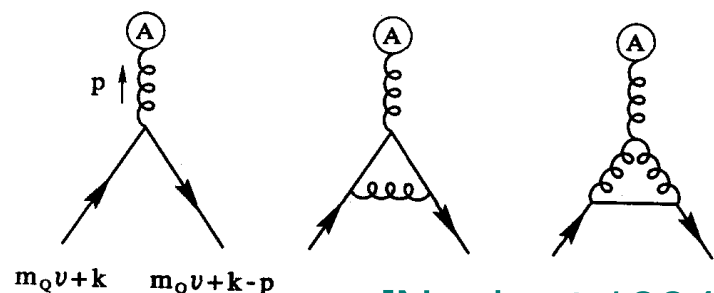
$$M_H^2 =$$

$$\begin{cases} \left(\bar{M} - \frac{3}{4}\Delta\right)^2 + (4c_0 - 2c_1)\Pi_H^{(2),0} \\ \quad + 2c_1\Pi_H^{(2),1} + \text{loops}, & 0^- \\ \left(\bar{M} + \frac{1}{4}\Delta\right)^2 + (4\tilde{c}_0 - 2\tilde{c}_1)\Pi_H^{(2),0} \\ \quad + 2\tilde{c}_1\Pi_H^{(2),1} + \text{loops}, & 1^- \end{cases}$$

匹配

ChPT

LEC 的 m_Q
标度依赖



[Neubert 1994]

- ▶ (1~2)-圈修正 [Falk et al 1990, Neubert et al 1997, Grozin et al 1997]

- ▶ ~~3圈修正~~ [Grozin et al 2008]

- ▶ 色磁项因子化

$$\mu_G^2(m_Q, m_q) = \hat{C}_{\text{cm}}(m_Q) \hat{\mu}_G(m_q)$$

- ▶ RG演化

$$R = \frac{\hat{C}_{\text{cm}}(m_b)}{\hat{C}_{\text{cm}}(m_c)} \simeq 0.80(4)$$

- 重夸克展开项的手征修正 —— 轻夸克味道破缺效应

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Lambda}_{(H)} &= \bar{\Lambda} \Big|_{\chi\text{-limit}} + (2C_0 - C_1) \Pi_H^{(2),0} + C_1 \Pi_H^{(2),1} + \dots \\ \mu_{\pi(H)}^2 &= \mu_\pi^2 \Big|_{\chi\text{-limit}} + (4\zeta_0 - 2\zeta_1) \Pi_H^{(2),0} + 2\zeta_1 \Pi_H^{(2),1} + \dots \\ \hat{\mu}_{G(H)}^2 &= \hat{\mu}_G^2 \Big|_{\chi\text{-limit}} + \frac{6\eta_0^{(Q)} - 3\eta_1^{(Q)}}{2\hat{C}_{\text{cm}}} \Pi_H^{(2),0} + \frac{3\eta_1^{(Q)}}{2\hat{C}_{\text{cm}}} \Pi_H^{(2),1} + \dots \end{aligned} \right\} \text{重夸克质量无关}$$

	$\Pi_H^{(2),0}$	$\Pi_H^{(2),1}$
$H_{u/d}$	$2B_0(2m + m_s)$	$2B_0m$
H_s	$2B_0(2m + m_s)$	$2B_0m_s$

- 领头阶和次领头阶手征 LEC 的 m_Q 跑动标度律

$$\triangleright \frac{\bar{M}^{(b)} \Delta^{(b)}}{\bar{M}^{(c)} \Delta^{(c)}} = \frac{\eta_{0,1}^{(b)}}{\eta_{0,1}^{(c)}} = \frac{\hat{C}_{\text{cm}}(m_b)}{\hat{C}_{\text{cm}}(m_c)} \simeq 0.80(4); \quad C_{0,1}, \zeta_{0,1}: m_Q\text{-无关}$$

▶ 根据拟合粲介子格点数据得到的 LEC 经跑动得到底介子手征 LECs

- Bethe-Salpeter 重求和么正化的一些结论

▶ $D_{s0}^*(2317)$, $D_{s1}(2460)$ 的底夸克伴子：质量范围与前人工作在误差范围内一致 [Lutz et al 2003, Guo et al 2003, Geng et al 2014, Lang et al 2015, Du et al 2018]

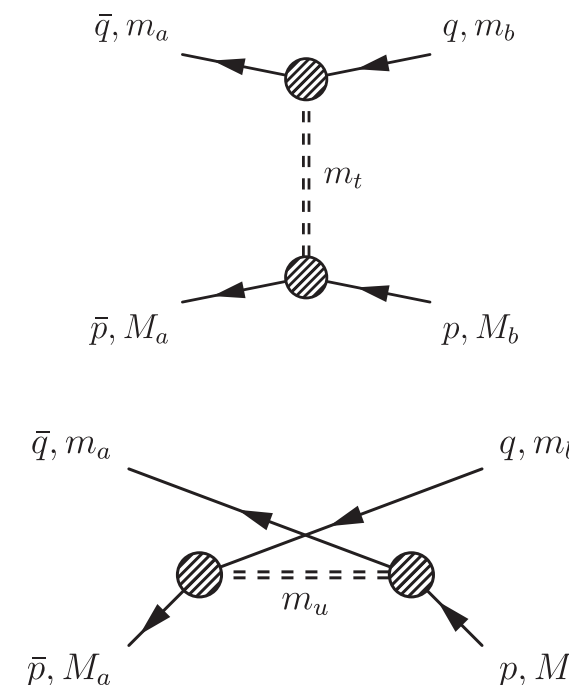
▶ $X(5568)$? 未见对应信号

• 更高分波 (p 波) 振幅的么正化?

▶ 长程力: 交叉道单粒子交换贡献 $\rightarrow$ 左手割线

▶ 阈附近渐近行为 $\text{Im}(T^J)^{-1} = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{p_{\text{cm}}}{s^{1/2}} \right)^{2J+1}$

▶ Bethe-Salpeter 方程在壳近似下难以处理



• 2020-2021: HSC格点组在非物理夸克质量下 $m_\pi \simeq 220 / 390 \text{ MeV}$ 对 $D\bar{K}$, DK , $D\pi$ 等多个耦合道的 s -, p -波开粲介子散射计算了大量相移结果 [HSC 2020; HSC 2021]

• 利用分波振幅的一次减除色散关系:

s -道么正性条件

$$\text{Im}[T^J(s > s_{\text{thr}})]^{-1} = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{p_{\text{cm}}}{s^{1/2}} \right)^{2J+1}$$

$$T_{ab}^J(s) = T_{ab}^J(\mu_M^2) + \underbrace{\int_{\text{left}} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{\rho_{ab}(s, \bar{s})}{\bar{s} - s}}_{\text{左手割线}} + \underbrace{\int_{s_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{s - \mu_M^2}{\bar{s} - \mu_M^2} \frac{T_{ac}^J \rho_c^J T_{cb}^{J*}}{\bar{s} - s - i\epsilon}}_{\text{右手割线: } s\text{-道么正割线}}, \quad \rho^J = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{p_{\text{cm}}}{s^{1/2}} \right)^{2J+1}$$

▶ 符合散射振幅的紫外渐近行为

▶ 与手征振幅直接匹配

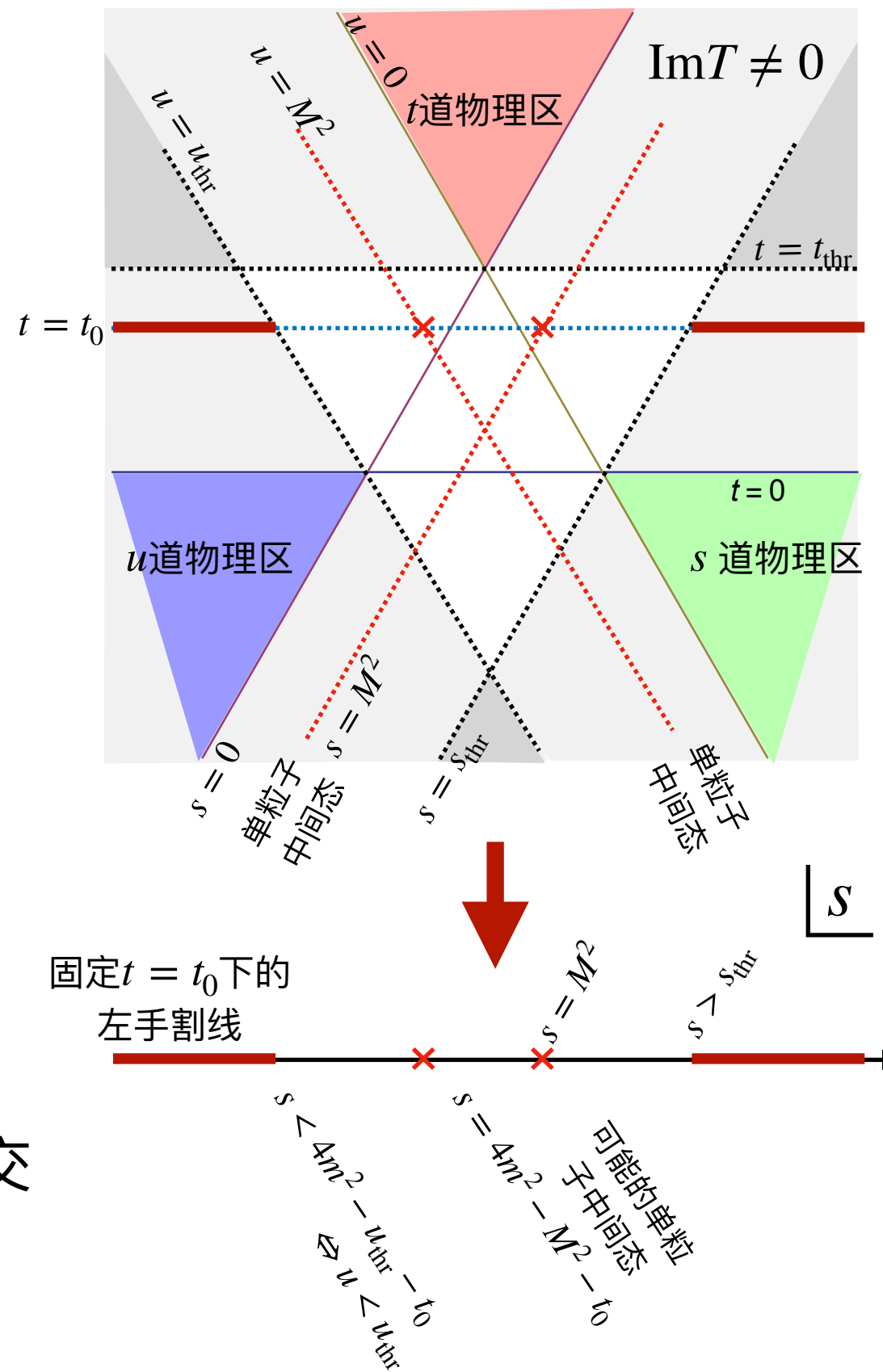
左手割线

- 完全散射振幅的左手割线
 - 在复 s 平面处于 $s \in \mathbf{R}$ 的实轴上
 - 固定 u 或 t 下
 - 由 t -道或 u -道么正阈产生
- 分波散射振幅的左手割线
 - 可能位于整个复 s 平面上
 - 对完全振幅的分波积分 ($00 \rightarrow 00$ 过程)

$$T^J(s) = \left(\frac{s}{\bar{p}_{\text{cm}} p_{\text{cm}}} \right)^J \int_{-1}^1 \frac{dx}{2} T(s, t) P_J(x)$$

- 相当于对交叉Mandelstam变量在整个交叉道么正阈上积分
 - 分波积分的 Froissart-Gribov 表示

两体全同粒子弹性散射Mandelstam图



- 分波积分 $T^J(s) \propto \int_{-1}^1 \frac{dx}{2} T(s, t) P_l(x)$

- 第二类勒让德多项式 $\int_{-1}^1 \frac{P_l(x')}{x-x'} \frac{dx'}{2} = Q_l(x)$, 满足 $\text{Im} Q_l(x) = -\frac{\pi}{2} P_l(x)$, $(-1 \leq x \leq 1)$

- 积分表示为复 x 平面中的回路积分 (固定 s)

$$T^J(s) \propto \int_{\Gamma} \frac{dx}{2\pi i} T(s, t) Q_l(x)$$

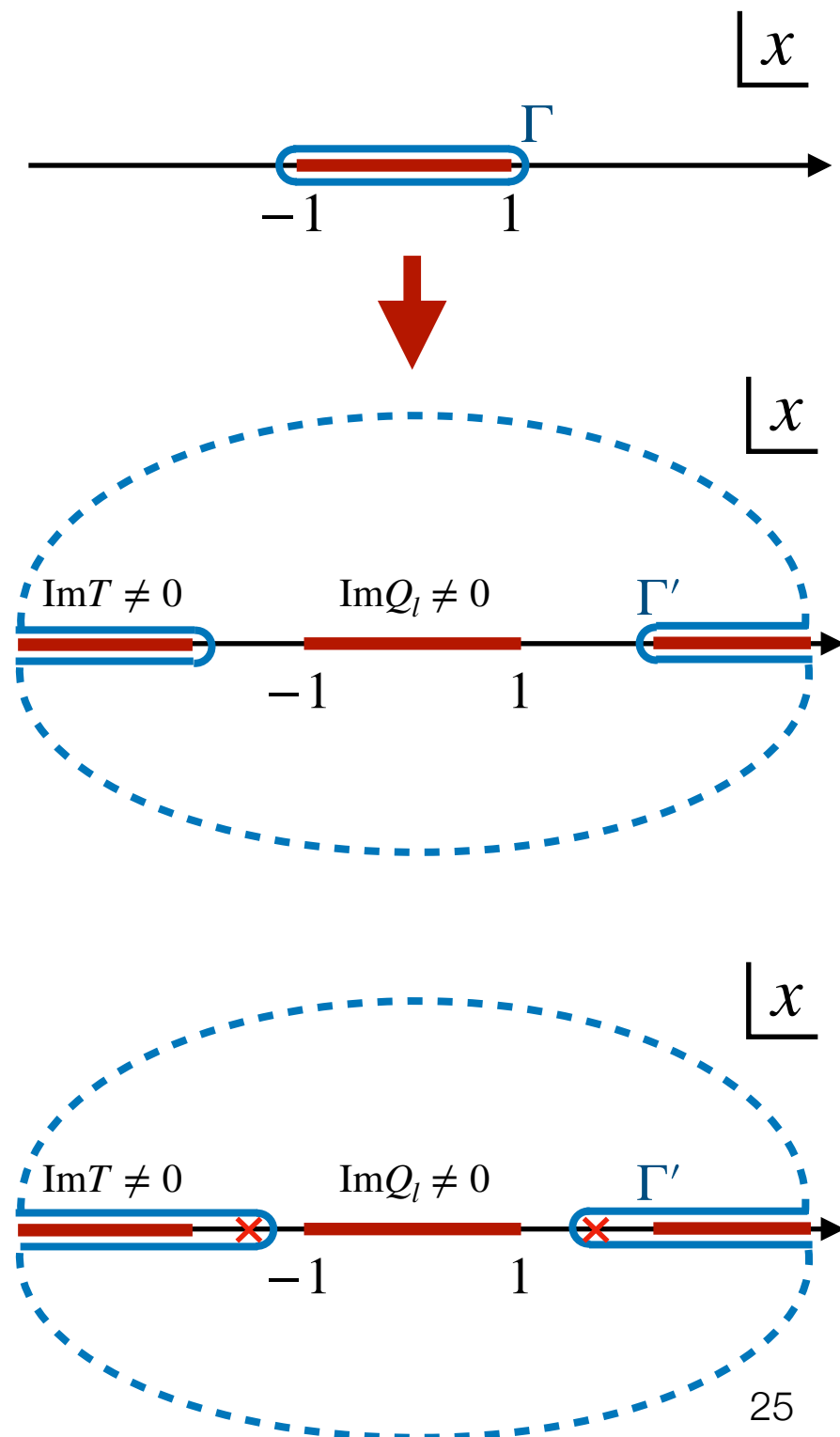
- 拉伸围道 $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ 直至 $T(s, t)Q_l$ 在复 x 平面遇到不解析点

- 即交叉道么正阈 $\text{Im} T(u > u_{\text{thr}} \mid t > t_{\text{thr}}) \neq 0$

- 分波积分等价于沿交叉道么正割线积分

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{2} T(s, t) P_l(x) = \frac{1}{2\pi \bar{p}_{\text{cm}} p_{\text{cm}}} \times \left(\int_{t_{\text{thr}}} \text{Im} T(s, \bar{t}) Q_l(x_t) d\bar{t} - \int_{u_{\text{thr}}} \text{Im} T(s, \bar{u}) Q_l(-x_u) d\bar{u} \right)$$

- 如存在交叉道单粒子交换, 积分下限为中间态质量



分波振幅左手割线的确定

- 色散关系的Mandelstam表示 (不考虑单粒子交换)

$$T(s, t) = \int_{s_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{Q_s(\bar{s})}{s - \bar{s}} + \int_{u_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{\pi} \frac{Q_u(\bar{u})}{u - \bar{u}} + \int_{t_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{d\bar{t}}{\pi} \frac{Q_t(\bar{t})}{t - \bar{t}} \\ + \int \frac{d\bar{s}}{\pi} \int \frac{d\bar{u}}{\pi} \frac{Q_{su}(\bar{s}, \bar{u})}{(s - \bar{s})(u - \bar{u})} + \int \frac{d\bar{u}}{\pi} \int \frac{d\bar{t}}{\pi} \frac{Q_{ut}(\bar{s}, \bar{t})}{(u - \bar{u})(t - \bar{t})} + \int \frac{d\bar{s}}{\pi} \int \frac{d\bar{t}}{\pi} \frac{Q_{st}(\bar{s}, \bar{t})}{(t - \bar{t})(s - \bar{s})}$$

忽略交叉道双割线结构，远离感兴趣能区

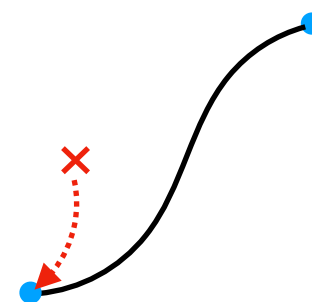
- 分波振幅左手割线来自于交叉道积分中被积函数的奇点

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{2} \int \frac{d\bar{t}}{\pi} \frac{Q_t(\bar{t})}{t - \bar{t}} P_l(x), \quad \int_{-1}^1 \frac{dx}{2} \int \frac{d\bar{u}}{\pi} \frac{Q_u(\bar{u})}{u - \bar{u}} P_l(x)$$

- 积分表示下函数的割线 [e.g. Eden et al *The analytic S-matrix*]:

- 不能通过改变积分路径绕过被积函数的奇点时，积分函数出现割线支点

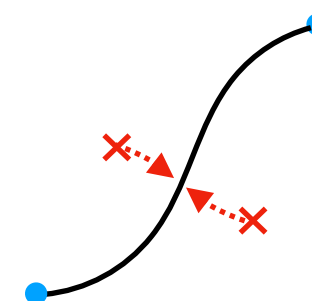
- 被积函数奇点位于积分端点: 端点奇异性 (end-point singularity)



e.g.

$$\int_a^b \frac{1}{x' - z} dx' = \log \frac{b - z}{a - z}$$

- 被积函数奇点夹住积分路径: 夹点奇异性 (pinch singularity)



e.g.

$$\int_0^1 \frac{1}{(x' - z)(x' - a)} dx' = \frac{1}{z - a} \log \frac{a(1 - z)}{(1 - a)z}$$

- 交换积分顺序 $\int \frac{d\bar{t}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{2} \frac{Q_t(\bar{t})}{t - \bar{t}} P_l(x), \int \frac{d\bar{u}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dx}{2} \frac{Q_u(\bar{u})}{u - \bar{u}} P_l(x)$
- 分波积分中的割线只来自于对 x 积分的端点奇异性

$$0 = (t(x) - \bar{t})_{x=\pm 1}, \quad 0 = (u(x) - \bar{u})_{x=\pm 1}, \quad (\bar{t} \geq t_{\text{thr}}, \bar{u} \geq u_{\text{thr}})$$

$$t = m^2 + \bar{m}^2 - \frac{(s - M^2 - m^2)(s - \bar{M}^2 - \bar{m}^2)}{2s} + 2p_{\text{cm}}(s) \bar{p}_{\text{cm}}(s)x$$

$$u = M^2 + \bar{M}^2 - s + \frac{(s - M^2 - m^2)(s - \bar{M}^2 - \bar{m}^2)}{2s} - 2p_{\text{cm}}(s) \bar{p}_{\text{cm}}(s)x$$

- 由此条件即反解出复 s -平面中左手割线支点所满足的参数曲线:

$$0 = (t(x) - \bar{t})_{x=\pm 1} \Rightarrow s = c_{\pm}^t(\bar{t}), \quad \bar{t} \geq t_{\text{thr}}$$

$$0 = (u(x) - \bar{u})_{x=\pm 1} \Rightarrow s = c_{\pm}^u(\bar{u}), \quad \bar{u} \geq u_{\text{thr}}$$

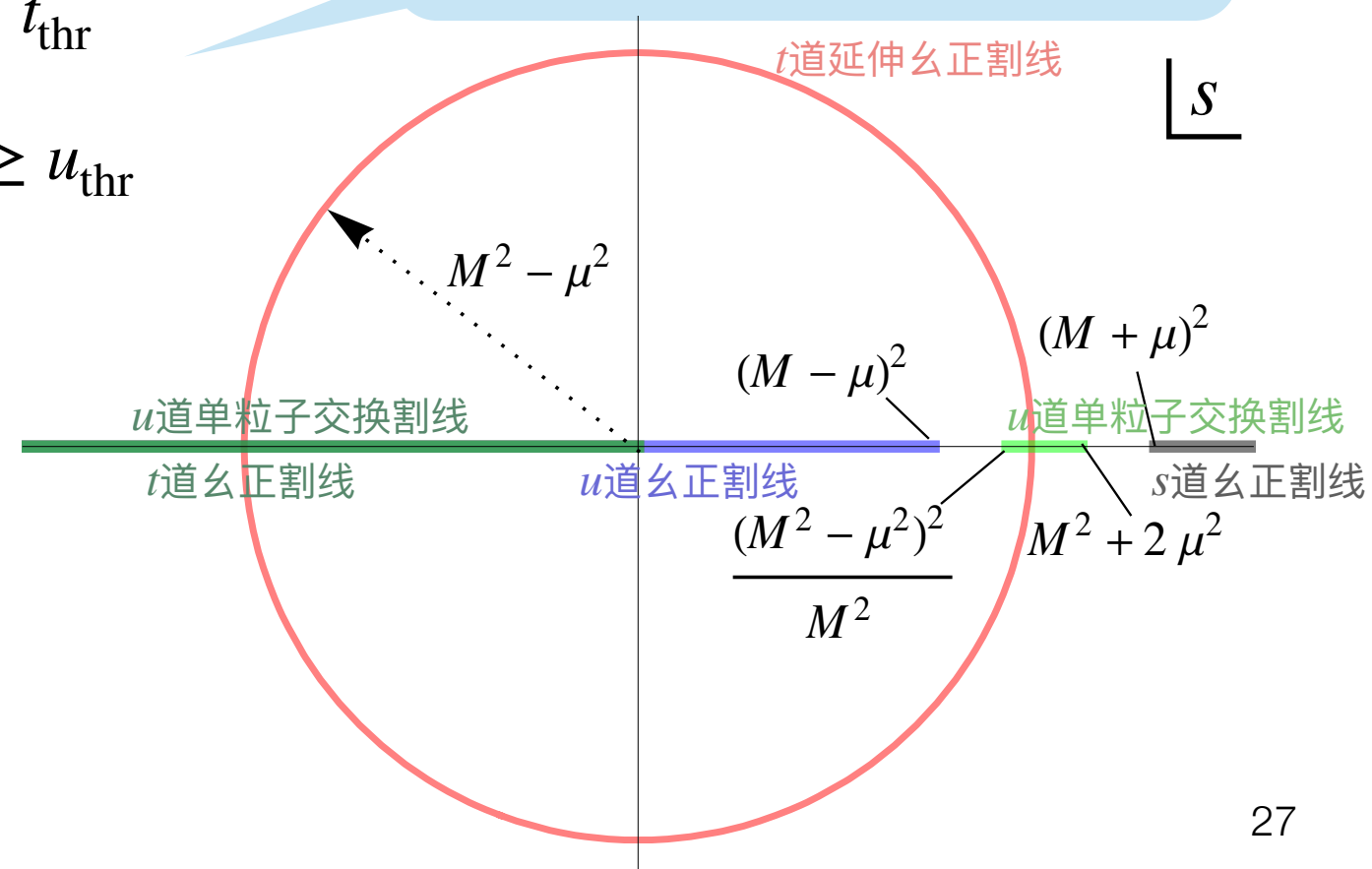
- e.g. $D\pi \rightarrow D\pi$ 弹性散射的左手割线:

$$u\text{道么正阈 } \bar{u} \geq (M + \mu)^2 \quad \begin{cases} \mu \equiv m_{\pi} \\ M \equiv M_D \end{cases}$$

$$u\text{道单粒子交换 } u = M_{D^*}^2 \simeq M^2$$

$$t\text{道(延伸)么正阈 } \bar{t} \geq 4\mu^2$$

如存在单粒子交换作用 $\bar{t} = m_t^2$, $\bar{u} = m_u^2$, 曲线 $c_{\pm}^t(\bar{t})$, $c_{\pm}^u(\bar{u})$ 的参数下限: $\bar{t} \geq m_t^2$, $u \geq m_u^2$



- 广义势方法 (Generalized potential approach (GPA)) [Gasparyan, Lutz 2010]

- ▶ 根据分波振幅的一次减除色散关系：

$$T_{ab}^J(s) = T_{ab}^J(\mu_M^2) + \int_{\text{left}} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{Q_{ab}(s, \bar{s})}{\bar{s} - s} + \int_{s_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{s - \mu_M^2}{\bar{s} - \mu_M^2} \frac{T_{ac}^J \rho_c^J T_{cb}^{J*}}{\bar{s} - s - i\epsilon}$$

- ▶ 定义广义势包含所有左手割线部分及减除项——且不包含任何右手奇异性

$$U_{ab}(s) \equiv T_{ab}^J(\mu_M^2) + \int_{\text{left}} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{Q_{ab}(s, \bar{s})}{\bar{s} - s}$$

$$\text{▶ GPA的基本方程 } T_{ab}^J(s) = U_{ab}(s) + \int_{s_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{s - \mu_M^2}{\bar{s} - \mu_M^2} \frac{T_{ac}^J \rho_c^J T_{cb}^{J*}}{\bar{s} - s - i\epsilon}$$

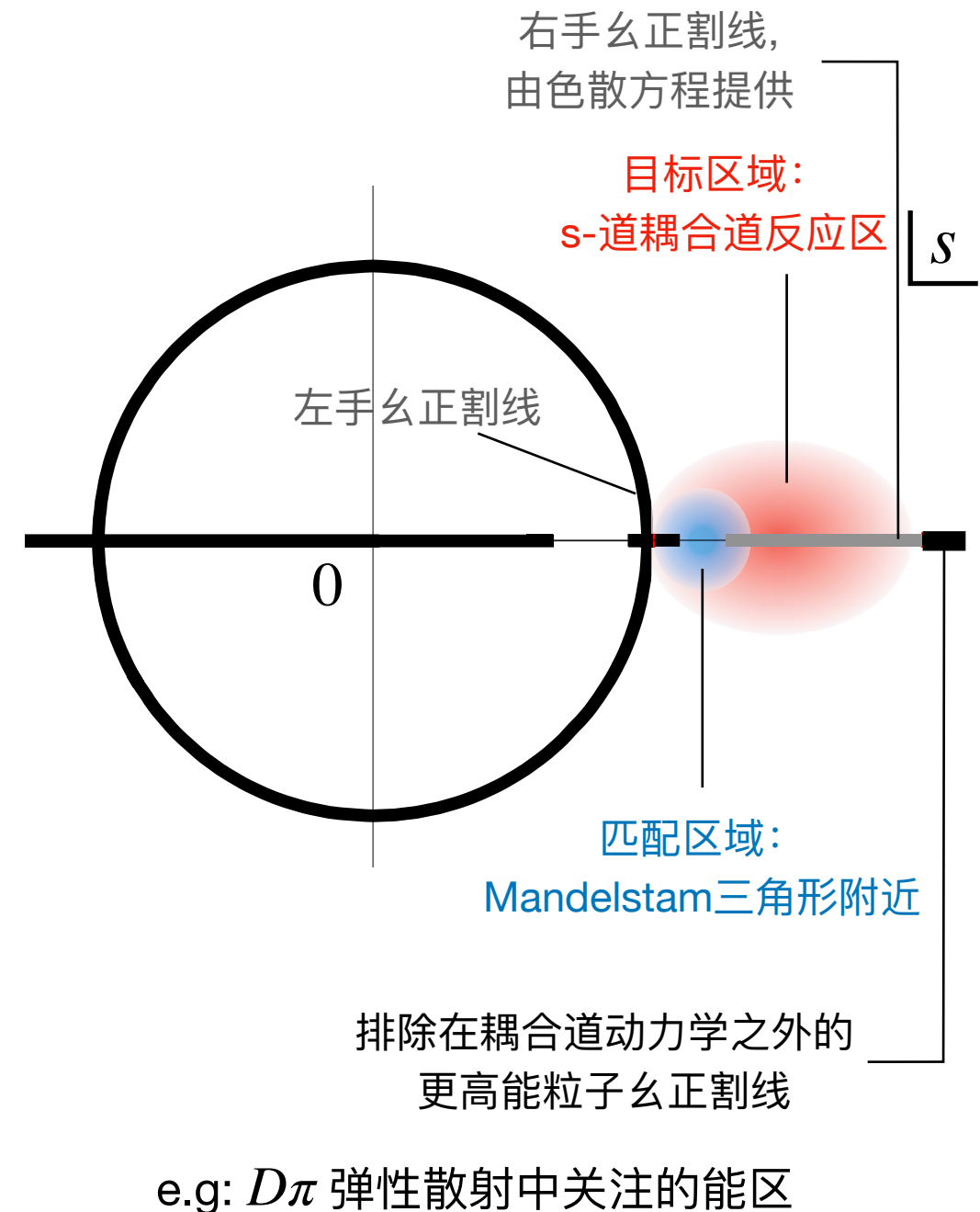
- ▶ 可以自然地将色散关系与手征振幅 $T_{\chi\text{PT}}^J$ 匹配

$$\text{▶ 减除能标 } \mu_M^2 \text{ 选为手征微扰论成立区域: } T^J(\mu_M^2) = T_{\chi\text{PT}}^J(\mu_M^2)$$

$$\text{▶ } \mu_M^2 \text{ 选在 Mandelstam 三角形内, e.g.: } \mu_M^2 \equiv \frac{1}{2}(m_1^2 + M_1^1 + (m_1 + M_1)^2) \\ < (m_1 + M_1)^2, \text{ 耦合道} \\ \text{散射中最小两体阈}$$

- 广义势 $U(s)$

- ▶ 不需要了解 $U(s)$ 在全空间的行为
- ▶ 关注的物理区域：s-道耦合道反应么正能区
 - ▶ 右手截止到更高能粒子s道产生阈
 - ▶ 左手截止到交叉道么正阈
 - ▶ 延展到复平面内一定深度——共振态存在区域
- ▶ 广义势在匹配区域附近等价于手征振幅
 - ▶ $U(s) = T_{\chi\text{PT}}^J(s), \quad s \simeq \mu_M^2$
- ▶ 这个关系不能扩展到感兴趣的整个能区中
 - ▶ 手征振幅错误的渐近行为 $T_{\chi\text{PT}}(s \rightarrow \infty) \propto s^n$



- 将广义势从匹配区域解析延拓到耦合道反应区域

- ▶ $U(s) = U_{\text{close-by}}(s) + U_{\text{far-distant}}(s)$

- ▶ 保留目标区域内手征振幅产生的左手奇异性

- ▶ 单粒子交换作用产生的左手割线部分 $U_{\text{close-by}}(s)$

- ▶ 剩余部分 $U_{\text{far-distant}}(s)$ 在目标区域是解析的 → 通过解析延拓得到

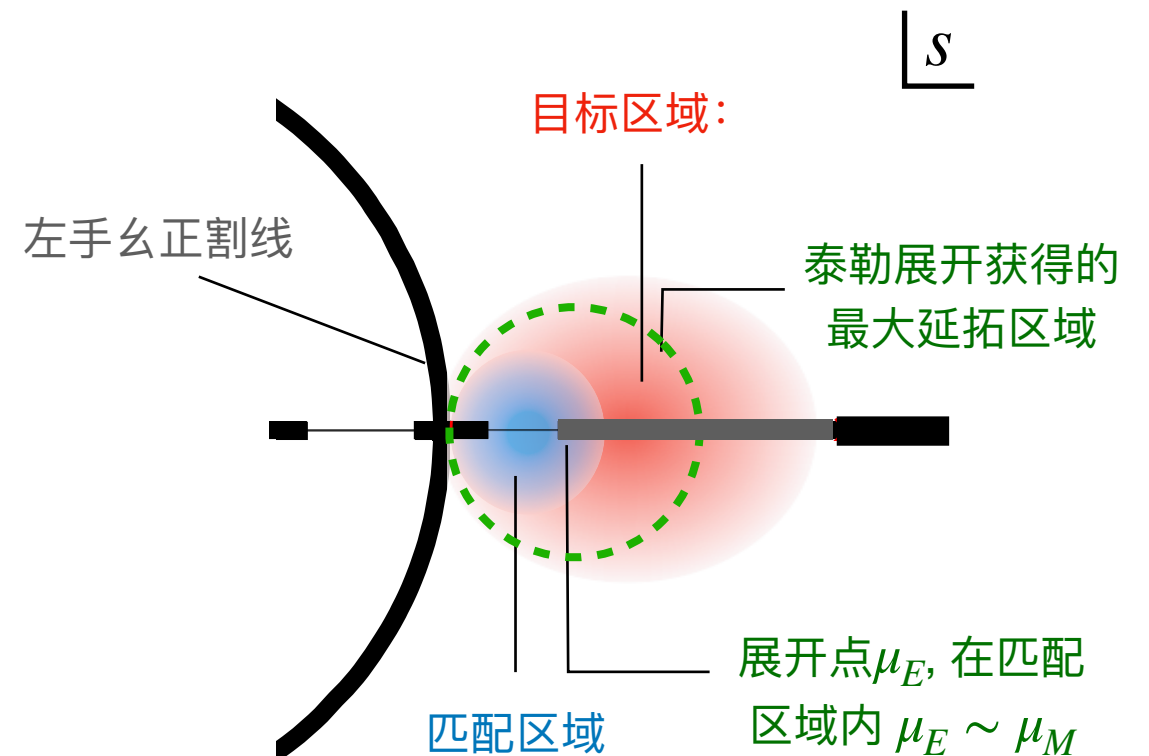
- ▶ 常规的解析延拓：泰勒展开

$$U_{\text{far-distant}}(s) = \sum_k \frac{1}{k!} \frac{d^k U}{ds^k} \Big|_{s=\mu_E^2} s^k$$

- ▶ 收敛半径受限于左手么正阈

- ▶ 不能涵盖整个目标区域

- ▶ 利用共形变换延伸泰勒展开的收敛区域



- 共形变换

- ▶ 对变量作共形变换，可实现从已知很小区域内的解析函数向很大区域上的延拓

- ▶ 文献[Gasparyan, Lutz 2010] 建议共形变换

- ▶
$$\xi(s) = \frac{\alpha(\Lambda_s^2 - s)^2 - 1}{(\alpha - 2\beta)(\Lambda_s^2 - s)^2 + 1},$$
- ▶
$$\alpha = (\Lambda_s^2 - \mu_E^2)^{-2}, \quad \beta = (\Lambda_s^2 - \Lambda_0^2)^{-2}$$

- ▶ 经共形变换后的泰勒展开形式

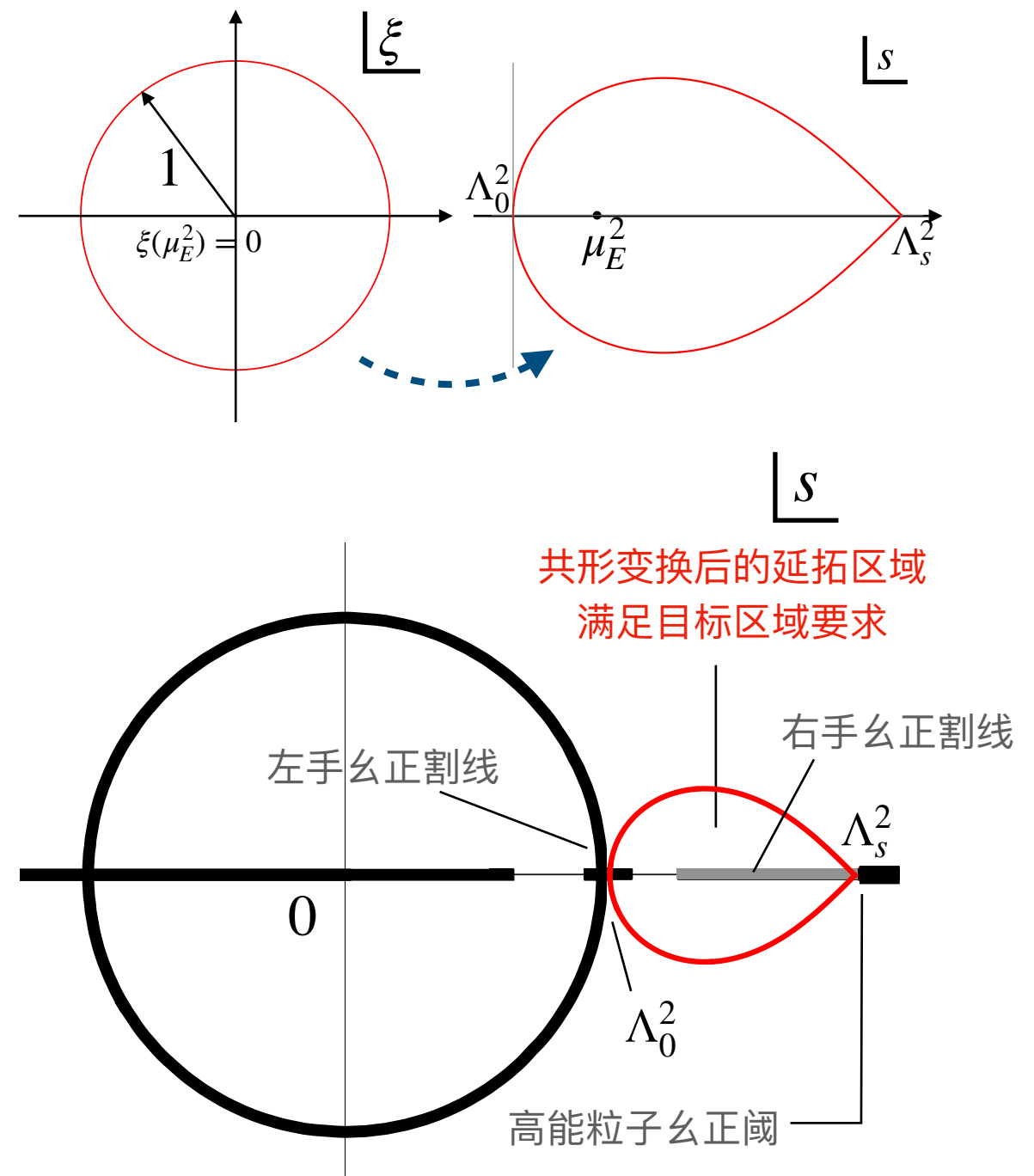
$$U_{\text{far-distant}}(s) = \sum_k \frac{1}{k!} \frac{d^k U}{d\xi^k} \Big|_{s=\mu_E^2} \xi(s)^k$$

- ▶ 满足所需的延拓目标区域

- ▶ Λ_0 和 Λ_s ：由左手么正阈和高能粒子右手么正阈限制

- ▶ 合理的紫外渐近行为

- ▶ 延拓区域边缘，平滑地 $U \rightarrow \text{const.}$



$D\pi$ 弹性散射的共形变换

- 广义势的左手割线部分 $U_{\text{close-by}}(s)$

- ▶ 单粒子交换相互作用产生的左手奇异性被部分包含在耦合道反应区内 $\rightarrow$ 此部分奇异性被独立计入

- ▶ 利用谱表示：

$$U_{\text{close-by}}^{\text{t-ch.}}(s) = \sum_n \int dx \frac{\lambda_n(s, x)}{t - m_t^2} = \sum_n \int \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{Q_n^t(\bar{s})}{s - \bar{s}}, \quad U_{\text{close-by}}^{\text{u-ch.}}(s) = \sum_n \int dx \frac{\lambda_n(s, x)}{u - m_u^2} = \sum_n \int \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{Q_n^u(\bar{s})}{s - \bar{s}}$$

- ▶ λ 包含分波积分的勒让德多项式，对自旋粒子的不变振幅求和

- ▶ 谱积分的路径沿左手割线进行：

$$\bar{s} = c_{\pm}^t(\bar{t}), \quad \bar{t} > m_t^2; \quad \bar{s} = c_{\pm}^u(\bar{u}), \quad \bar{u} > m_u^2$$

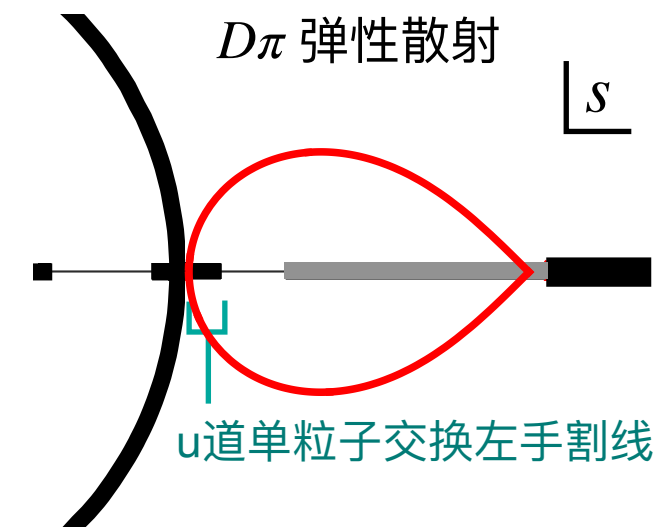
- ▶ 得到 $U_{\text{close-by}}(s)$ 的积分表示

$$\int dx \frac{\lambda_n(s, x)}{t - m_t^2} = \sum_{\pm} \int_{m_t^2}^{\infty} \frac{d\bar{t}}{\pi} \frac{dc_{\pm}^t}{d\bar{t}} \frac{Q_{n,\pm}^t(\bar{t}, m_t^2)}{s - c_{\pm}^t(\bar{t})}; \quad \int dx \frac{\lambda_n(s, x)}{u - m_u^2} = \sum_{\pm} \int_{m_u^2}^{\infty} \frac{d\bar{u}}{\pi} \frac{dc_{\pm}^u}{d\bar{u}} \frac{Q_{n,\pm}^u(\bar{u}, m_u^2)}{s - c_{\pm}^u(\bar{u})}$$

- ▶ 单粒子交换的谱函数 $Q_{n,\pm}$ 可求 [Lutz et al 2015]

- ▶ 注：振幅的奇异性须均来自动力学 $\leftarrow$ 自旋粒子的螺旋度振幅有运动学奇点 [Kibble 1960]

- ▶ 需要无运动学奇异性的分波振幅 [Vidana, Lutz 2012]



- 得到广义势 $U = U_{\text{close-by}} + \sum_k c_k \xi^k$, $c_k = \frac{1}{k!} \frac{d^k U}{d\xi^k} \Big|_{s=\mu_E^2}$
 - ▶ 可求解色散方程 $T_{ab}^J(s) = U_{ab}(s) + \int_{s_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{s - \mu_M^2}{\bar{s} - \mu_M^2} \frac{T_{ac}^J \rho_c^J T_{cb}^{J*}}{\bar{s} - s - i\epsilon}$

- N/D 技术, 对散射振幅因子化

- ▶ 非线性色散积分方程约化为线性积分方程组

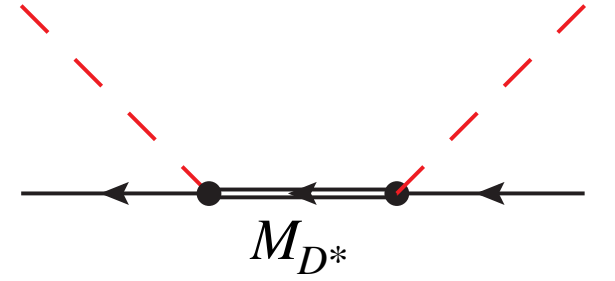
$$T_{ab}^J(s) = D_{ac}^{-1}(s) N_{cb}(s) \Rightarrow \begin{cases} N_{ab}(s) = U_{ab}(s) + \int_{s_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{s - \mu_M^2}{\bar{s} - \mu_M^2} \frac{N_{ac}(\bar{s}) \rho_{cd}(\bar{s}) [U_{db}(\bar{s}) - U_{db}(s)]}{\bar{s} - s} \\ D_{ab}(s) = \delta_{ab} - \int_{s_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{s - \mu_M^2}{\bar{s} - \mu_M^2} \frac{N_{ac}(\bar{s}) \rho_{cb}(\bar{s})}{\bar{s} - s - i\epsilon} \end{cases}$$

实现对色散积分的求解

- ▶ D 函数包含所有右手么正性

- 依此得到的 N, D 方程只构成色散方程的一组解，并非唯一解

- ▶ D 方程可包含任意多极点——CDD极点 $s = M_{CDD}^2$
- ▶ 利用具CDD极点形式的 N/D 形式计入s-道单粒子交换作用



$$D_{ab}(s) = \delta_{ab} - \frac{s - \mu_M^2}{s - M_{CDD}^2} R_{ab}^{(D)} - \int_{s_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{s - \mu_M^2}{\bar{s} - \mu_M^2} \frac{N_{ac}(\bar{s}) \rho_{cb}(\bar{s})}{\bar{s} - s - i\epsilon}$$

$$N_{ab}(s) = U_{ab}^{\text{eff}}(s) - \frac{s - \mu_M^2}{s - M_{CDD}^2} \left[R_{ab}^{(B)} + R_{ac}^{(D)} U_{cb}^{\text{eff}}(s) \right] + \int_{s_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{s - \mu_M^2}{\bar{s} - \mu_M^2} \frac{N_{ac}(\bar{s}) \rho_{cd}(\bar{s}) [U_{db}^{\text{eff}}(\bar{s}) - U_{db}^{\text{eff}}(s)]}{\bar{s} - s}$$

其中 $U^{\text{eff}} = U_{ab}(s) + \frac{g_a M_{D*}^2 g_b}{s - M_{D*}^2} \frac{s - \mu_M^2}{M_{D*}^2 - \mu_M^2}$ 减除s-道准粒子(quasi-particle)交换贡献

$$R_{ab}^{(D)} = \frac{M_{D*}^2 - M_{CDD}^2}{M_{D*}^2 - \mu_M^2} \left(\delta_{ab} - \Re \int_{s_{\text{thr}}}^{\infty} \frac{d\bar{s}}{\pi} \frac{M_{D*}^2 - \mu_M^2}{\bar{s} - \mu_M^2} \frac{N_{ac}(\bar{s}) \rho_{cb}(\bar{s})}{\bar{s} - M_{D*}^2 - i\epsilon} \right)$$

- ▶ 恰当的CDD极点项 $R^{(B)}, R^{(D)}$ 使 $T = D^{-1}N$ 不依赖于CDD极点的选取

- 手征振幅 $T_{\chi\text{PT}}$ [Lutz, XYG, Heo, Korpa 2022]:

- 考察直到 Q^4 阶的手征修正效应

- 短程力: 点相互作用 ($Q^{1,2,3,4}$) 阶; tadpole单圈修正

- 长程力: 单粒子交换; bubble单圈修正

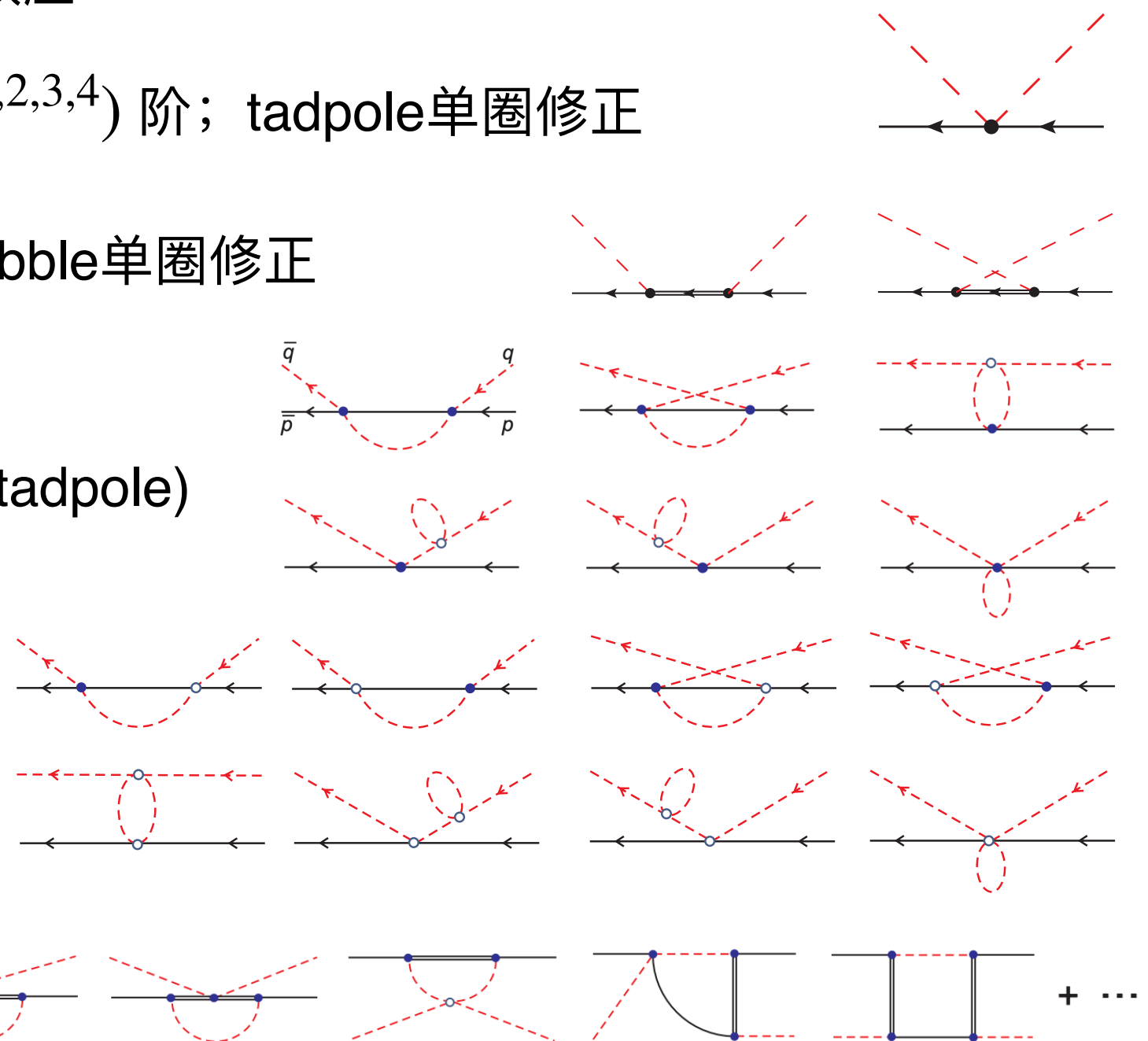
- Q^3 手征单圈修正 (bubble + tadpole)

- Q^4 手征单圈修正 (bubble + tadpole)

- 未包括三角图和箱图

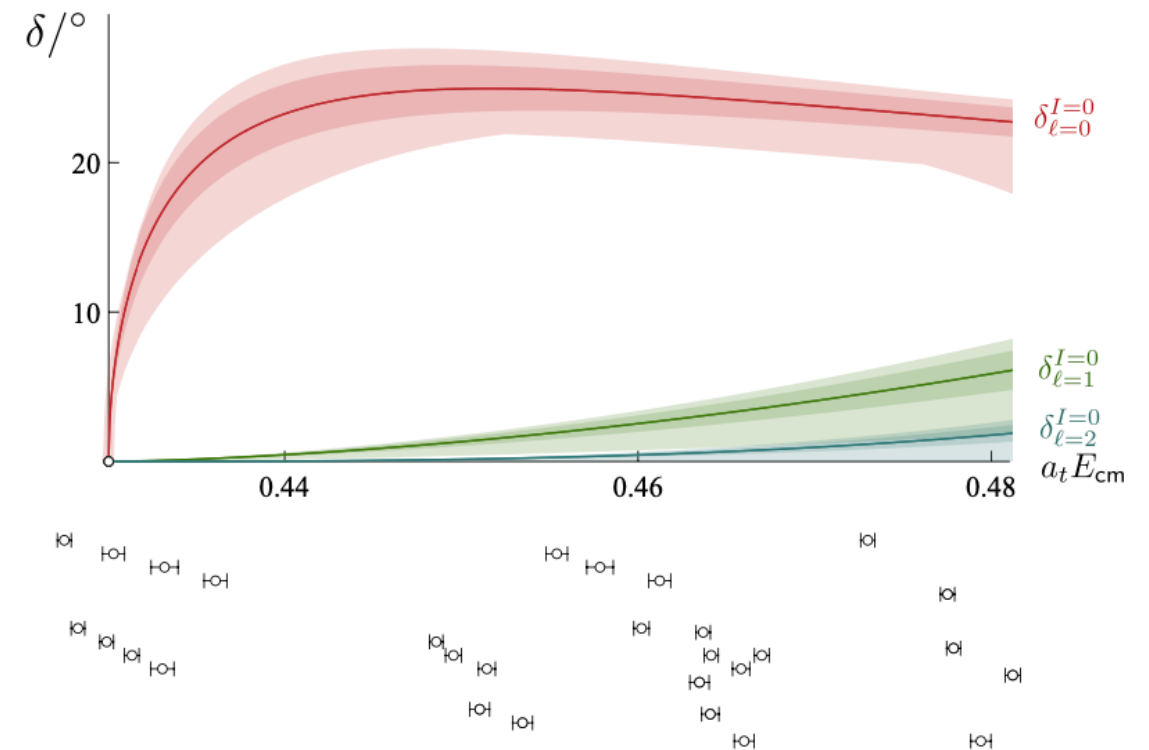
- 圈图的重整化能标依赖严格抵消

- 26 个含粲手征拉氏量的未知低能常数 (大 N_C 近似下) $\rightarrow$ 拟合格点



- 拟合非物理质量下的格点结果：
 - HSC格点组：粲介子耦合道 s/p 波散射相移
 - $D\pi$ 散射 [HSC 2016; HSC 2021]
 - $D\pi, D\eta, D_s\bar{K}$ ($I = 1/2$) 在 $m_\pi \sim 390\text{MeV}$ 时 s -波耦合道散射
 - $I = 1/2$ 在 $m_\pi \sim 220\text{MeV}$ 时 s -, p -波弹性散射能区
 - $I = 3/2$ 在 $m_\pi \sim 390\text{MeV}$ 时 s -波弹性散射
 - DK 散射 [HSC 2020]
 - $I = 0$ 耦合道在 $m_\pi \sim 220\text{MeV}$ 及 390MeV 时 s -, p -波弹性散射能区
 - $D\bar{K}$ 散射 [HSC 2020]
 - $I = 0$ 在 $m_\pi \sim 220\text{MeV}$ 及 390MeV 时 s -, p -波弹性散射
 - $I = 1$ 在 $m_\pi \sim 220\text{MeV}$ 及 390MeV 时 s -, p -波弹性散射

- ▶ 拟合无限体积外推后的格点结果
- ▶ 取样点选在有限体积分立能级附近
- ▶ 拟合格点单位下的结果，自行定标 a
- ▶ 尽可能选用 $(ak)^{2l+1}\cot\delta$ 形式
- ▶ 取样数据点上限
 - ▶ p 波下 D 散射与 D^* 散射耦合
 - ▶ $DK/D\bar{K}$ 散射截止到 $D^*K/D^*\bar{K}$ 阈; $D\pi$ 散射截止到 $D\pi\pi$ 阈
- ▶ 共123个数据点
- ▶ 同时拟合格点组 ETMC, HPQCD, HSC 在不同非物理夸克质量下的基态粲介子 $D_{(s)}$, $D_{(s)}^*$ 质量 (55个数据点)
- ▶ $\chi^2/178 = 1.24$ 的拟合质量



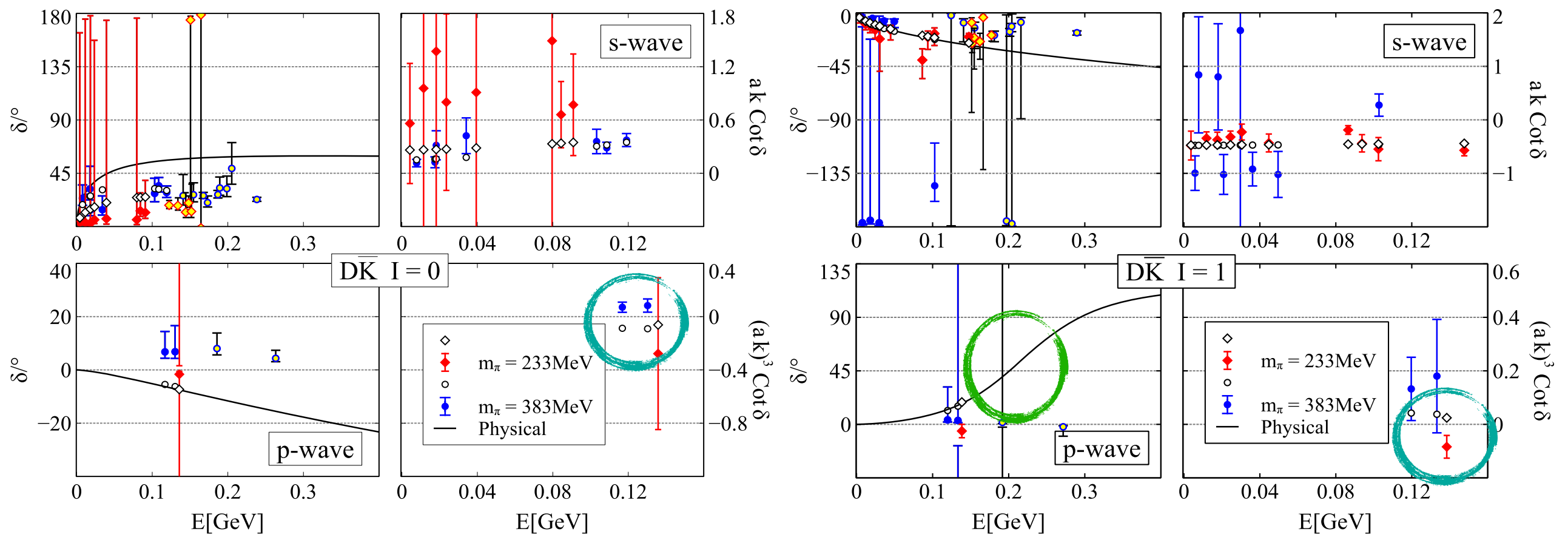
e.g. $m_\pi \sim 390\text{MeV}$ $D\bar{K}(I=0)$ 相移的格点结果
[HSC 2020]

- 开粲介子散射相移的手征外推 [Lutz, XYG, Heo, Korpa 2022]

- 利用 GPA 实现耦合道散射的么正化:

- ▶ s -波: D, D_s 介子和Goldstone玻色子 π, K, η 的两体耦合道散射
 - ▶ p -波: D, D_s, D^*, D_s^* 介子和Goldstone玻色子 π, K, η 的两体耦合道散射

- $D\bar{K} (I = 0, 1)$ 耦合道散射相移的物理质量外推



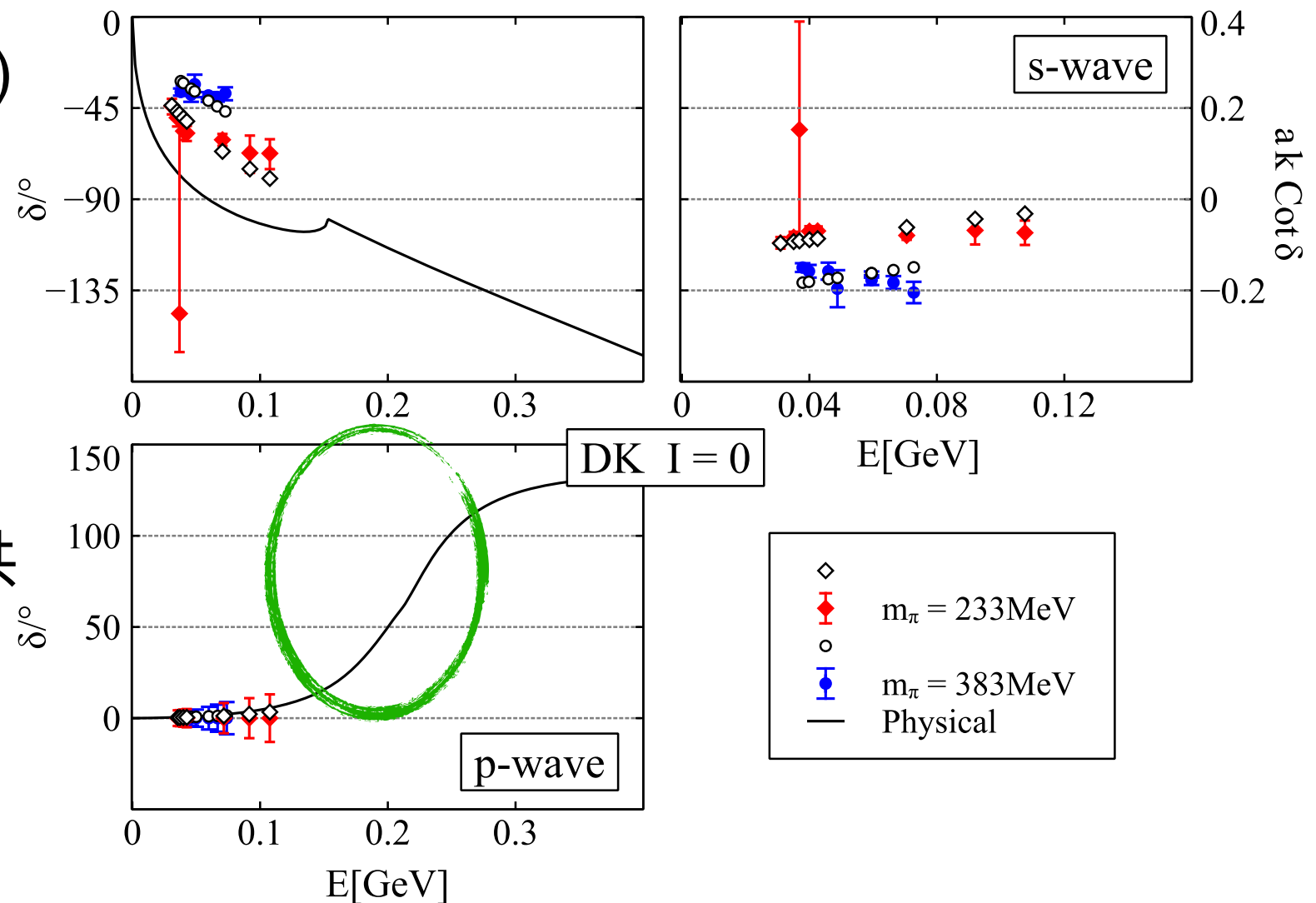
- ▶ $I = 1$ 时 p 波上的吸引相互作用 $\rightarrow$ 共振态?
 - ▶ p 波, $I = 0$ 的 $m_\pi \sim 380$ MeV 与 $I = 1$ 的 $m_\pi \sim 230$ MeV 与格点数据的明显偏离 $\rightarrow D^*\bar{K}$ 耦合的影响?

- $DK(I=0)$ 散射相移的物理质量外推

- ▶ 物理质量下, p波 ($J^P = 1^-$) 共振态相移信号
~ 2.6 GeV

- ▶ 味道反三重态

- ▶ Particle Data Group: 共振态 $D_{s1}^*(2700)$?



- $DK(I=1)$ 散射相移

- ▶ 物理质量下 s-波共振态信号出现在耦合的 $D_s\pi$ 散射道上

- ▶ 味道六重态

- ▶ 没有格点数据约束, 应持保留态度

- $I = 1/2$ 的 πD 耦合道散射相移的物理质量外推

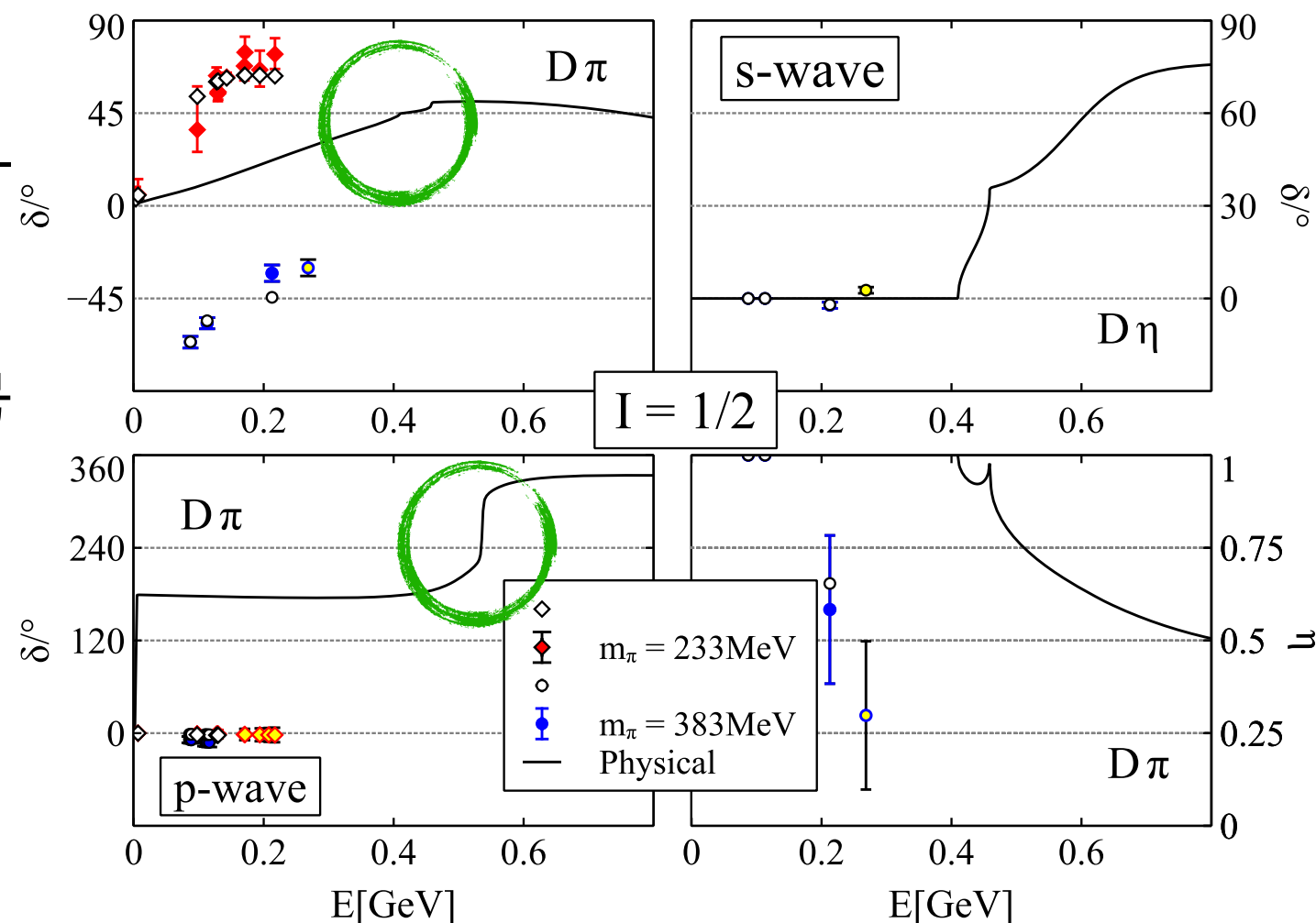
- ▶ s-波相移随 m_π 剧烈变化

- ▶ 与[XYG, Lutz, Heo 2018]的预测一致

- ▶ 物理质量下没有明显的共振态信号

- ▶ 虽然非物理黎曼叶有两个极点
 $2.24 - 0.09i \text{ GeV}$
 $2.38 - 0.03i \text{ GeV}$

- ▶ 味道三重态和六重态



- ▶ p-波，在物理质量下，有明显的共振态相移信号 $\sim 2.6 \text{ GeV}$

- ▶ 可能属于味道反三重态表示

- ▶ 与之耦合的 $D^* \pi \rightarrow D^* \eta$ 散射在物理质量下有反常阈存在，显著影响相移结果，参见 [Korpa, Lutz, XYG, Heo 2022]

- ▶ 格点质量下不存在反常阈

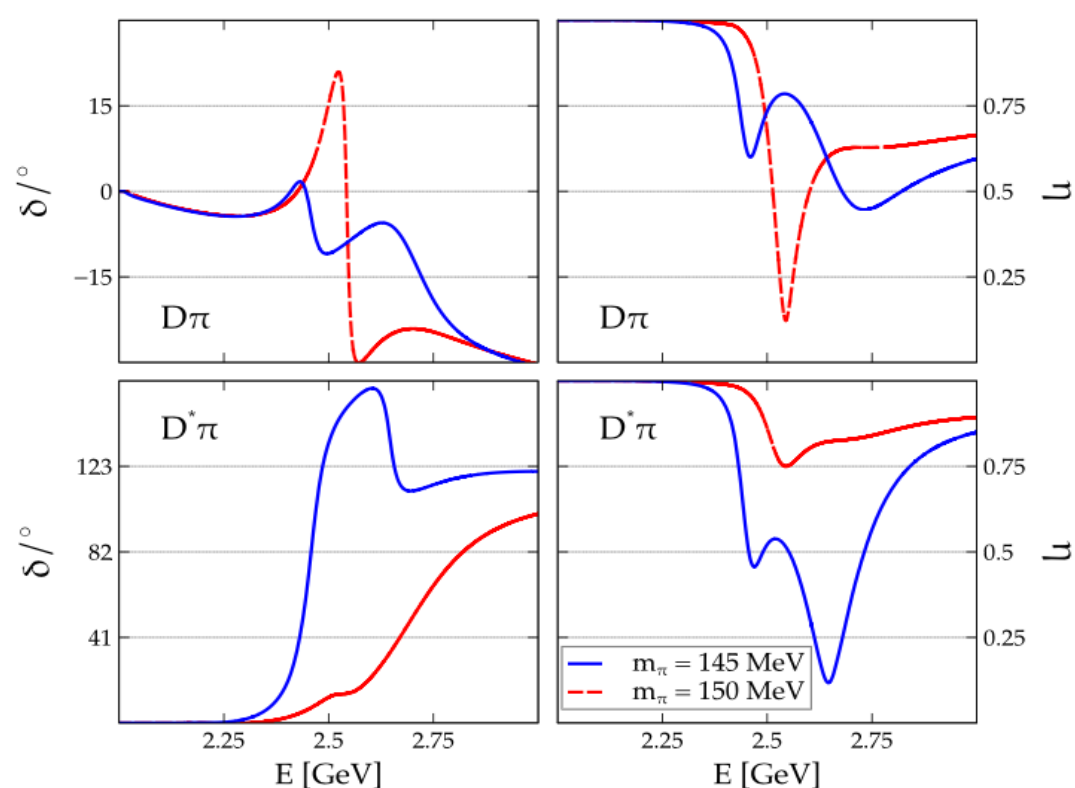
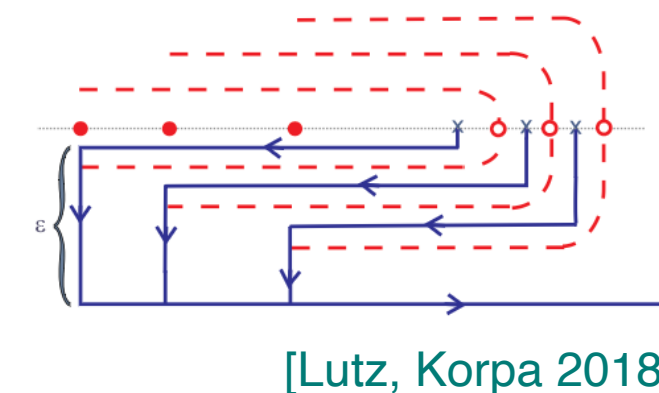
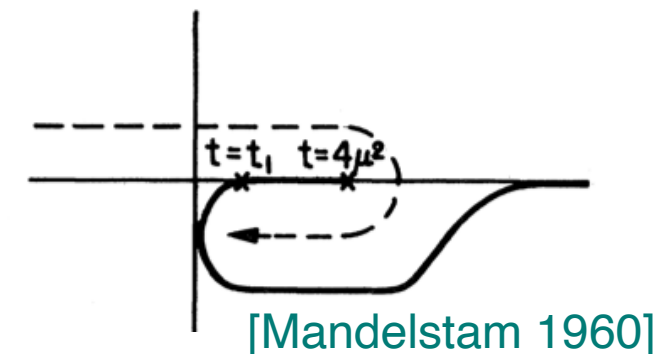
• 总结

- ▶ 我们利用不同格点组非物理夸克质量下的格点数据确定D介子手征拉氏量中的未知低能常数
 - ▶ 基态 D, D_s, D^*, D_s^* 质量
 - ▶ D介子-Goldstone 玻色子散射观测量
- ▶ 对散射振幅，通过施加幺正性条件实现对手征振幅的推广
 - ▶ 对 s-波，可利用在壳近似的 Bethe-Salpeter 方程方法进行幺正化
 - ▶ 通过标度变化扩展到开底介子散射——未见关于X(5568)的信号
 - ▶ 包含 p-波时，需要超越在壳近似下 Bethe-Salpeter 方程方法
- ▶ 采用“广义势方法 GPA”，利用色散关系实现 D 与Goldstone 玻色子的耦合道散射振幅的幺正性和因果性
 - ▶ 与手征微扰论直到 $N^3\text{LO}$ 的 (泡泡图 + 蝌蚪图) 单圈结果匹配
 - ▶ 同时拟合 D 介子基态质量和 s-波/p-波散射相移的格点结果
 - ▶ 将 HSC 在非物理夸克质量上开粲介子散射相移外推到物理夸克质量
 - ▶ $I = 1/2$ 的 s波 πD 散射未见明显的共振态相移信号
 - ▶ 多个道上显示可能有 p波共振态存在
 - ▶ 不确定性：三角图&箱子图；离散格子效应；无限体积外推

Thank you

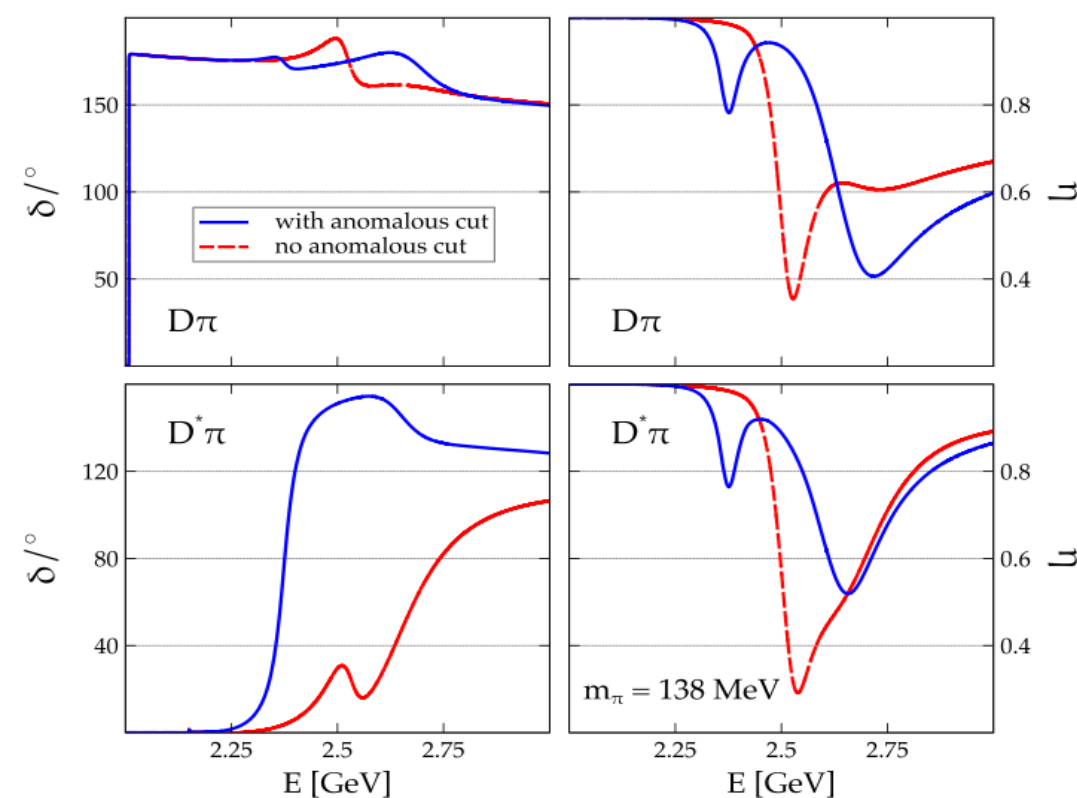
反常阈

- 随外腿质量的降低左手割线绕过右手么正阈
- 需要拉伸右手割线并保证割线上下岸的么正性 [Lutz, Korpa 2018]
- $D^*\pi \rightarrow D^*\eta$ ($I = 1/2$) 中u道单粒子交换过程出现反常阈 [Korpa, Lutz, XYG, Heo 2022]
 - 取决于 π 介子质量: $m_\pi \gtrsim 150\text{MeV}$ 不存在反常阈; $m_\pi \rightarrow$ 物理质量反常阈出现
 - p波下随 $D - D^*$ 散射道耦合对 $D\pi$ 散射相移造成显著影响



不同 π 介子质量下, $D\pi$, $D^*\pi$ 的p波散射相移和非弹性系数。 $m_\pi = 150\text{MeV}$ 时没有反常阈, $m_\pi = 145\text{MeV}$ 时出现反常阈

[Korpa, Lutz, XYG, Heo 2022]



物理质量下计入和排除反常割线贡献时 $D\pi$, $D^*\pi$ 的p波散射相移和非弹性系数。